

Computational Technique for Teaching Mathematics - CT^2M : sobre a construção de curvas parametrizadas

Computational Technique for Teaching Mathematics - CT^2M : about the
construction of parameterized curves

Francisco Regis Vieira Alves*

Resumo

Nesse trabalho trazemos para o leitor certos exemplos extraídos de um ramo em Matemática conhecido como Geometria Algébrica – GA. Contrapomos seu caráter formalizante e estruturante com situações que conduzem o aluno à intuição e a percepção visual de propriedades gráfico-geométricas. Nosso objeto matemático de interesse será o objeto curva algébrica plana. Mostraremos algumas possibilidades de se obter a descrição de seu traço no plano. Em todas as possibilidades de exploração desse problema, a visualização deve funcionar como elemento invariante à cada situação. Por fim, os dados e argumentos evidenciados serão sistematizados e constituirão uma técnica computacional para o ensino de Matemática (Computational Technique for Teaching Mathematics - CT^2M) que se apoia no uso dos softwares Geogebra e no Software de Computação Algébrica Maple. Não obstante, indicaremos também certas limitações de cada uma desses softwares.

Palavras-chave: Curva de Bézier, Polinômios de Bernstein, Visualização, Geogebra.

* Doutor em Educação com ênfase no ensino de Matemática, docente do mestrado profissional em ensino de Ciências e Matemática – UFC. Departamento de Matemática – IFCE.

1 Introdução

Reconhecidamente, existem vários métodos matemáticos com vistas à obtenção do traço ou o comportamento gráfico de uma curva algébrica plana ou equação definida por uma expressão polinomial em duas variáveis, do tipo $f(X,Y)=0$. Por outro lado, falamos sobre um problema complexo e antigo (YATES, 1947), registrado ainda em vários compêndios de História da Matemática (EDWARDS, 1969). Ademais, nossa discussão busca enfatizar a tecnologia como um componente imprescindível no tocante à mobilização preliminar de um entendimento do estudante.

Deste modo, apresentamos neste escrito alguns métodos matemáticos que permitem a construção de gráficos e o traço de curvas parametrizadas. Muitos deles pertencem ao Cálculo e a Geometria Algébrica (Polígono de Newton, curva de Bezier) e, por isso, exigem uma fundamentação maior no sentido de explicar/justificar determinadas escolhas.

Assim, na próxima seção, discutiremos uma aplicação do Cálculo Diferencial em Várias Variáveis. Alguns elementos distinguem os próximos argumentos da tradicional abordagem dos livros de Cálculo (ALVES, 2014a; 2014b). Tal fato é oriundo da exploração de propriedades conhecidas da família de polinômios de Bernstein, formalmente definida por

$$B_{i,n}(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i} = \left(\frac{n!}{i!(n-i)!} \right) t^i (1-t)^{n-i}, \text{ com a condição que } 0 \leq i \leq n \text{ e } t \in [0,1].$$

Para concluir, descreveremos os elementos que buscam sistematizar/fundamentar uma técnica para a exploração da tecnologia, caracterizada pelo uso de softwares, que visa uma abordagem diferenciada para conteúdos matemáticos acadêmicos.

2 Construção do traço a partir do Cálculo

Vamos, pois, considerar os pontos: $P_1 = (3,0); P_2 = (0,1); P_3 = (-1,0); P_4 = (0,-1); P_5 = (3,0)$. Neste caso, sabemos que os polinômios de Bernstein constituem uma base para a representação dessas curvas. Deste modo, avaliamos os elementos da base a partir da expressão obtida por $((1-t)+t)=1 \therefore ((1-t)+t)^4 = 1^4 = 1$ o que produz as expressões: $[(1-t)^4, 4t(1-t)^3, 6t^2(1-t)^2, 4t^3(1-t), t^4]$. Doravante, escrevemos as seguintes componentes de nossa curva $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ como combinação da base de polinômios de Bernstein:





$$\begin{cases} x(t) = (1-t)^4 \times 3 + 4t(1-t)^3 \times 0 + 6t^2(1-t)^2 \times (-1) + 4t^3(1-t) \times 0 + t^4 \times 3 = 12t^2 - 12t + 3 \\ y(t) = (1-t)^4 \times 0 + 4t(1-t)^3 \times 1 + 6t^2(1-t)^2 \times 0 + 4t^3(1-t) \times (-1) + t^4 \times 0 = 8t^3 - 12t^2 + 4t \end{cases}$$

Deste modo, conseguimos a seguinte parametrização $\alpha(t) = (x(t), y(t))$. Agora, temos o vetor velocidade $\alpha'(t) = (x'(t), y'(t)) = (24t - 12, 24t^2 - 24t + 4)$ e facilmente podemos efetuar/realizar o estudo do sinal de suas funções componentes. De imediato, obtemos que $24t - 12 = 0 \Leftrightarrow t = 1/2$ enquanto que

$$24t^2 - 24t + 4 = 0 \Leftrightarrow t_1 = \frac{3 - \sqrt{3}}{6} \text{ e } t_2 = \frac{3 + \sqrt{3}}{6}.$$

Tabela 1: Descrição do traço da curva a partir das componentes do vetor velocidade.

Valores do parâmetro $t \in [0, 1]$	$t < t_1$	$t_1 < t < 1/2$	$1/2 < t < t_2$	$t_2 < t$
Estudo do sinal $x'(t)$	—	—	+	+
Comportamento de $x(t)$	Decrescente ←	Decrescente ←	Crescente →	Crescente →
Estudo do sinal $y'(t)$	+	—	—	+
Comportamento de	Crescente	Decrescente	Decrescente	Crescente

$y(t)$	↑	↓	↓	↑
Vetor resultante $\alpha'(t)=(x'(t),y'(t))$				

Fonte: Elaboração própria

Agora, com origem na tabela acima, convidamos o leitor ao entendimento da figura abaixo. Assinalamos, todavia, que apenas recorrendo aos conhecimentos do Cálculo em Várias Variáveis - CVV, elaboramos a tabela 1 (ALVES, 2014b). Com arrimo da figura 1, indicamos os vetores velocidade relativamente a cada trecho de variação correspondente ao parâmetro $t \in [0,1]$. Com efeito, para $t < t_1$, divisamos que o vetor resultante se descreve por ↖.

Seguindo os valores crescentes do parâmetro, para o intervalo $t_1 < t < 1/2$, inferimos também, com origem no sinal das funções $x'(t)$ e $y'(t)$ que o comportamento resultante é do tipo ↙. Ora, com origem na coluna três, relativamente ao intervalo $1/2 < t < t_2$, inferimos que o vetor resultante se comporta como ↘. Por fim, no trecho $t_2 < t$, inferimos que o resultante obtido é do tipo ↗.

Finalmente, a partir da informação desses vetores, podemos marcar as regiões (fig. 1) na tela do Geogebra, que enumeramos por 1,2,3 e 4. Desta maneira, apresentamos na figura 1, os dados visuais relativos à parametrização $\alpha(t) = (x(t), y(t)) = (12t^2 - 12t + 3, 8t^3 - 12t^2 + 4t)$. Assinalamos neste caso que os conhecimentos do Cálculo em uma variável foram reutilizados no contexto do Cálculo em várias variáveis. Na figura 1 indicamos ainda o traço restante da curva, para valores do parâmetro $t \rightarrow +\infty$ e $t \rightarrow -\infty$.

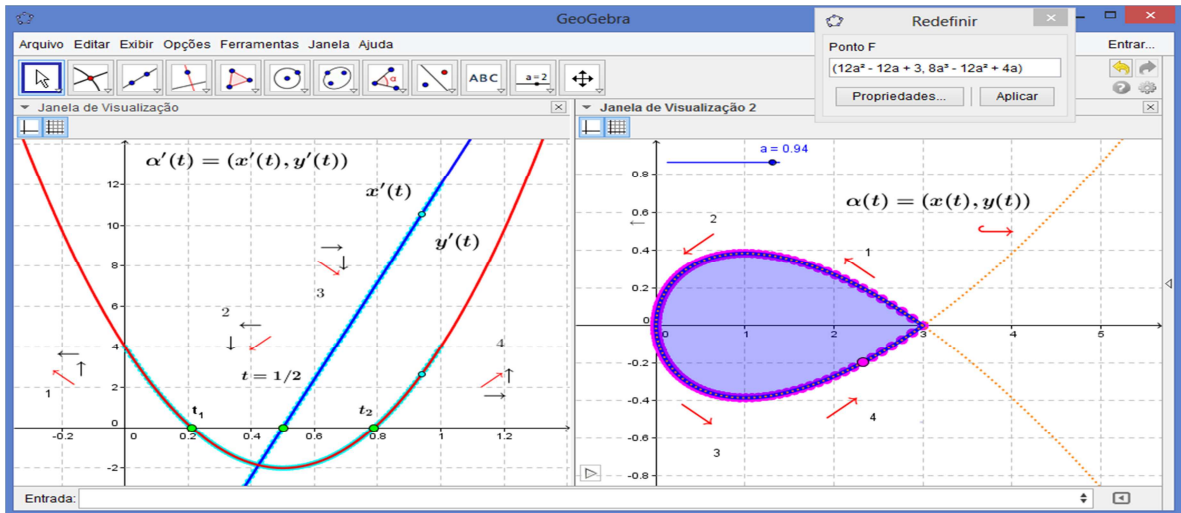


Figura 1: Obtenção do traço de uma curva com o uso dos polinômios de Bernstein e o Cálculo

Por outro lado, com origem nesses pontos de controle, empregamos o algoritmo de Casteljau na figura 1, ao lado esquerdo. Visualizamos, agora, o processo construtivo e de aproximação por meio de uma família de poligonais e curvas de ordens inferiores que irão compor, paulatinamente, a curva de Bezier final, com quatro pontos controle. Forneceremos maiores detalhes desse algoritmo na seção seguinte.

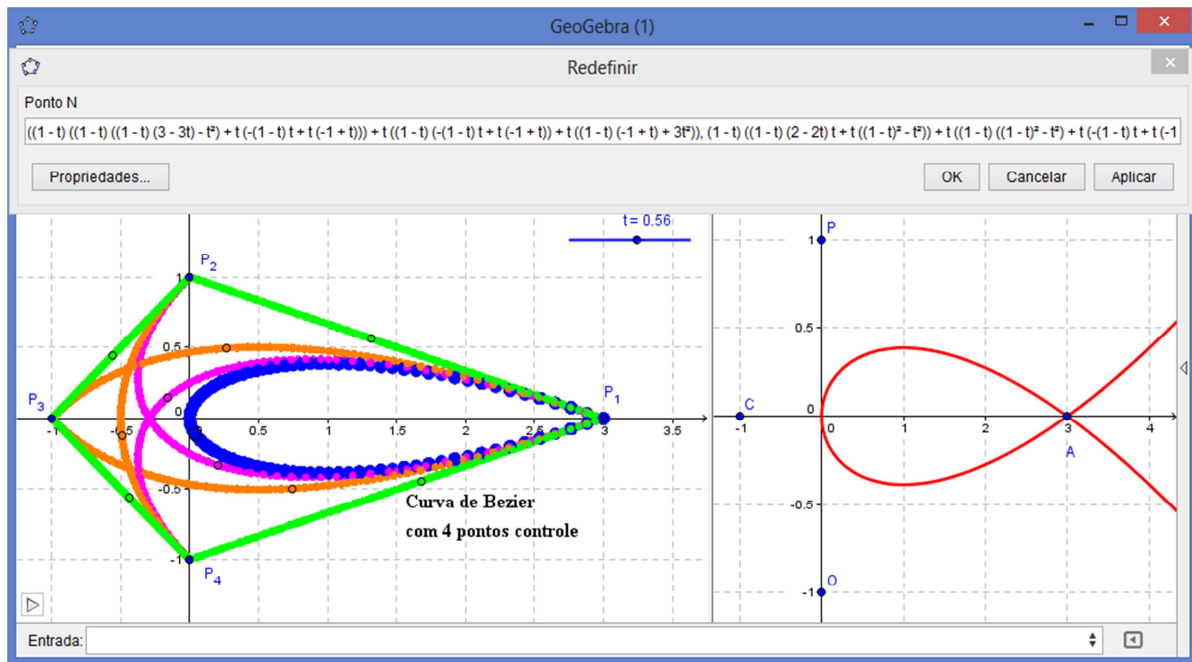


Figura 2: Exploração de um método construtivo para a obtenção da curva com o Geogebra

Na próxima seção, vamos apresentar os cálculos empregados para a obtenção da construção dinâmica que divisamos acima. Alertamos, todavia, que os cálculos pormenorizados podem ser encontrados em Vainsencher (2009) no que concerne o uso do Algoritmo de Casteljaou. Na figura 2, indicamos em cor azul, a curva de Bezier, parametrizada do seguinte modo: $(x(t),y(t))=((1-t)((1-t)((1-t)(3-3t)-t^2)+t(-(1-t)t+t(-1+t))))+t((1-t)(-(1-t)t+t(-1+t))+t((1-t)(-1+t)+3t^2)),(1-t)((1-t)(2-2t)t+t((1-t)^2-t^2))+t((1-t)((1-t)^2-t^2)+t(-(1-t)t+t(-1+t))))$ (*)

3 Curva de Pierre Bézier e os polinômios de Bernstein

Do ponto de vista histórico, o que hodiernamente é conhecido como curva de Bezier foi objeto de um estudo quase concomitante, no contexto da indústria automotiva, por parte de um engenheiro da Renault, Pierre Bezier, como também, por parte do matemático e físico P. Casteljaou (GUILLOT, 2008, p. 3). Seu uso

pode ser evidenciado há décadas em vários ramos de pesquisa (PRICOPIE & UDRISTE, 2013; YANG, 2013), como em Matemática Aplicada, Indústria Automobilística, Arquitetura e Design Computacional (DUCAN, 2005; FARIN, 1986; FORREST, 1972; WATT, 2000).

Por outro lado, nossa discussão busca enfatizar uma abordagem para o ensino de CVV, elegendo a visualização como componente imprescindível, tendo em vista a mobilização de um entendimento, por parte do estudante, de natureza intuitiva e tácita. Para tanto, destacaremos o *algoritmo de Casteljau*, que permite avaliar um ponto qualquer de uma curva de Bezier de grau 'n' que denotamos por $C^n_i(t)$, correspondentemente ao parâmetro $t \in [0,1]$ (RISKUS, 2006).

O algoritmo Casteljau que é formalmente descrito do seguinte modo:

$$\begin{cases} P_i^r(t) = (1-t) \cdot P_i^{r-1}(t) + t \cdot P_{i+1}^{r-1}(t) \\ P_i^0(t) = P_i \end{cases}, \text{ com a condição em que}$$

$(1 \leq r \leq n \text{ e } 0 \leq i \leq n-r)$ (FARIN, 2002, p. 45). Ele foi empregado para a obtenção da construção que indicamos na figura 2.

A descrição anterior é comentada e aplicada, sem ulteriores implicações, por Vainsencher (2009, p. 116-117). Sua abordagem é desenvolvida no contexto de estudo da Geometria Algébrica - GA. Seu intuito é explicado no seguinte excerto:

As curvas de Bezier servem a um propósito semelhante, com certas vantagens computacionais e estéticas. São dados os pontos distintos $P_1 = (x_1, y_1), P_2 = (x_2, y_2), P_3 = (x_3, y_3), \dots, P_d = (x_d, y_d)$, mas agora contentamo-nos com uma curva racional que se "ajuste visualmente" à distribuição gráfica dos pontos.

Vale observar o apelo perceptual indicado acima por Vainsencher (2009). Como indicamos no início, a família de polinômios de Bernstein, denotada por $B_{i,n}(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i} = \left(\frac{n!}{i!(n-i)!} \right) t^i (1-t)^{n-i}$, admite e possui uma série de propriedades formais que, se tornam visuais, na medida em que empregamos a tecnologia.

Por exemplo, suas propriedades relativas à partição da unidade, seu caráter de recursividade, propriedade de base para espaço vetorial, seu caráter

de positividade, seu caráter de simetria, propriedades de aproximação de funções contínuas. Sua formulação foi devida ao matemático Sergei Natanovich Bernstein (1880-1968), nascido em Odessa, na Ucrânia.

Na figura 3, divisamos a aplicação da noção de polinômios de Bernstein para a descrição do *algoritmo de Casteljau*, empregado massivamente na indústria automotiva. Vale observar que tal algoritmo, quando aplicado no espaço \mathbb{R}^3 , produz determinadas deformações. Por outro lado, desde que o conjunto de polinômios de Bernstein constitui também uma base para o espaço vetorial das funções de grau no máximo 'n' podemos, assim, descrever toda curva de Berzier como uma combinação desses elementos (como indicamos em (*)).

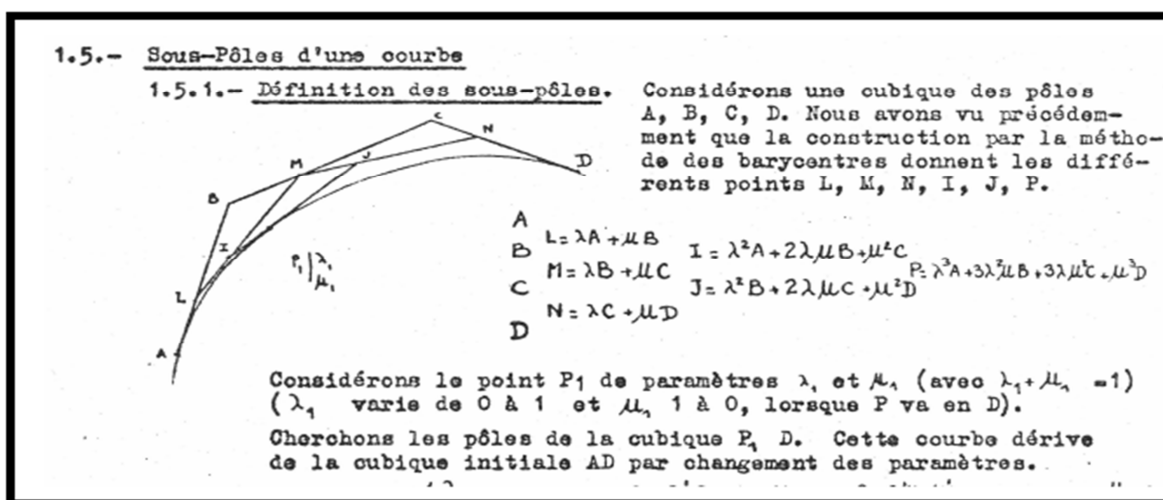


Figura 3: Texto de P. Casteljau de 1963 que emprega a noção de polinômios de Bernstein (ISMAIL, 2013, p. 9).

A abordagem de Casteljau é baseada na escolha de pontos de controle. De modo sucinto, para um certo valor $t \in [0,1]$, o algoritmo avalia e subdivide uma curva de Bezier. Com recurso nesse instrumento conceitual, podemos conduzir o aprendiz, passo a passo, na obtenção de uma parametrização. Não obstante, advertimos o grau de inexecuibilidade do algoritmo sem um expediente que empregue um software para o cálculo dos procedimentos que dependem da quantidade de pontos iniciais de controle (ALVES, 2014b). Ademais, determinados cálculos, tendo em vista uma descrição dinâmica com o software

Geogebra, requerem a exploração de outro software que realize operações algébricas (ALVES, 2013).

4 O método do polígono de Newton

Um interesse *standard* em GA consiste na descrição do conjunto de soluções da equação do tipo $f(X,Y)=0$, em uma vizinhança adequada da origem. Em certos casos, conseguimos resolver claramente tal equação. Em termos gerais, se considerarmos $f(X,Y)=0$, como uma equação implícita de y em função de x , nem sempre é possível calcular a solução de y por um processo de aproximação que produz uma expansão da solução y em potências de x . No contexto do Cálculo, empregamos por vezes o Teorema da Função Implícita (GUIDORIZZI, 2010).

Vamos considerar agora a curva $X^6 - X^2Y^3 - Y^5 = 0$. De acordo com o método comentado por Vainsencher (2009, p. 40-41), observamos a presença dos monômios: X^6, X^2Y^3, Y^5 e, em seguida, consideramos os seguintes segmentos: $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{AC}$ (ver fig. 4, ao lado esquerdo). Agora, com o auxílio do software, obtemos as variações correspondentes ao parâmetro $0 \leq t \leq 1$ e, correspondentemente aos pontos do suporte dessa curva $\Delta(f) = \{(6,0), (2,3), (0,5)\}$ obteremos, pois, o *diagrama de Newton* e, daí, com o auxílio do software Geogebra, apresentamos os segmentos parametrizados. Por exemplo, no caso de $(2,3), (0,5) \therefore (1-t)(2,3) + t(0,5)$ que designa o segmento \overline{AC} . Assinalamos ainda que os pontos que indicamos há pouco A, B e C foram obtidos diretamente das potências das variáveis X^6, X^2Y^3, Y^5 .

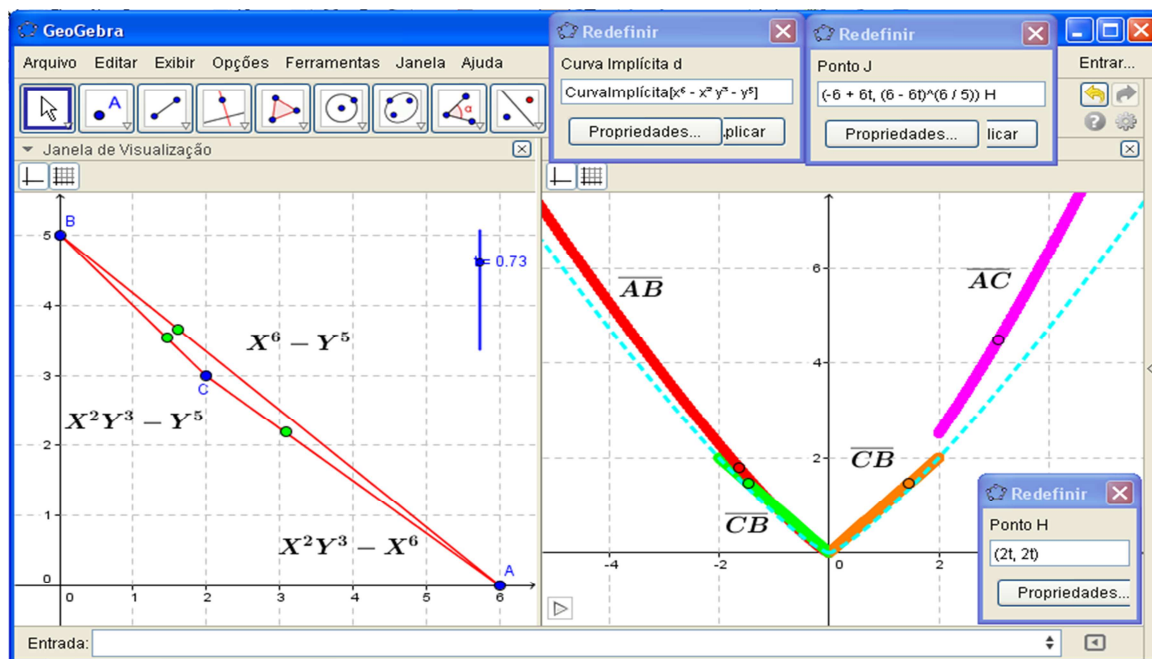


Figura 4: Visualizando o polígono de Newton com o Geogebra e a descrição do traço de uma curva algébrica

É nítido na figura 4, ao lado direito, certas imperfeições oriundas no esboço do traço desta curva (restrito apenas aos pontos próximos da origem). Com efeito, quando lidamos com uma curva algébrica em que comparecem muitos monômios do tipo $X^\alpha Y^\beta$, com $(\alpha, \beta) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, obteremos muitos pontos no plano e o seu suporte pode ser visualizado, todavia, a descrição de cada trecho correspondente, com o Geogebra, pode ser tornar uma tarefa fastidiosa. Os detalhes sobre a consistência do método podem ser conferidos em Vainsencher (2009).

Em alguns casos clássicos, envolvendo o estudo de curvas recorrentemente abordadas nos livros de Cálculo, registramos as limitações do método da descrição do traço, com origem em seus pontos suporte. Com efeito, sabemos que o Folium de Descartes admite uma parametrização racional, discutida em 1638 por Descartes (EDWARDS, 1969). Sua descrição em coordenadas é indicada por $g(X, Y) = X^3 + Y^3 - 6XY = 0$. Na figura 5, indicamos rapidamente o seu suporte $\Delta(g) = \{(3, 0), (0, 3), (1, 1)\}$ mas, todavia, correspondentemente ao segmento \overline{BA} determinado pelos monômios $X^3 Y^0$ e

X^0Y^3 , a parametrização do trecho (ao lado direito) e coincide com o traçado real da curva, obtido neste caso a partir do uso de uma parametrização racional.

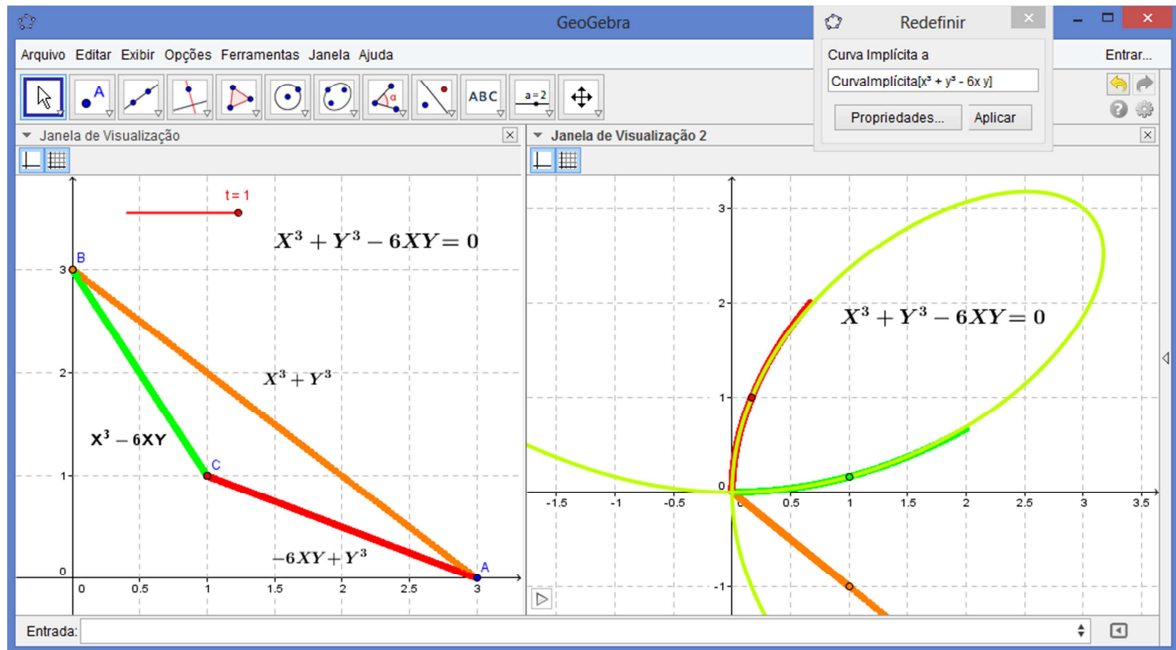


Figura 5: Visualizando o polígono de Newton de uma curva com o Geogebra

Vamos considerar, agora, a curva $X^2 + 4Y^2 - 4XY + 17X - 9Y - 41 = 0$ e com origem nesta equação, isolamos os termos: $X^2Y^0, 4X^0Y^2, -4X^1Y^1, 17XY^0, -9X^0Y^1, -41X^0Y^0$ o que descreve os seguintes pontos do seu suporte: $(2,0); (0,2); (1,1); (1,0); (0,1); (0,0) \in \mathbb{R}^2$. Na figura 6, indicamos cada segmento determinado por esse conjunto de pontos. Vale assinalar, por exemplo, que não conseguimos determinar o traço correspondente com a expressão $X^2 + 4Y^2$. Por outro lado, quando tomamos a expressão $4Y^2 - 4XY \therefore 4Y^2 - 4XY = 0$ e podemos escrever $Y - X = 0 \therefore (t, t)$ o que não possui um comportamento sobre o traço abaixo.

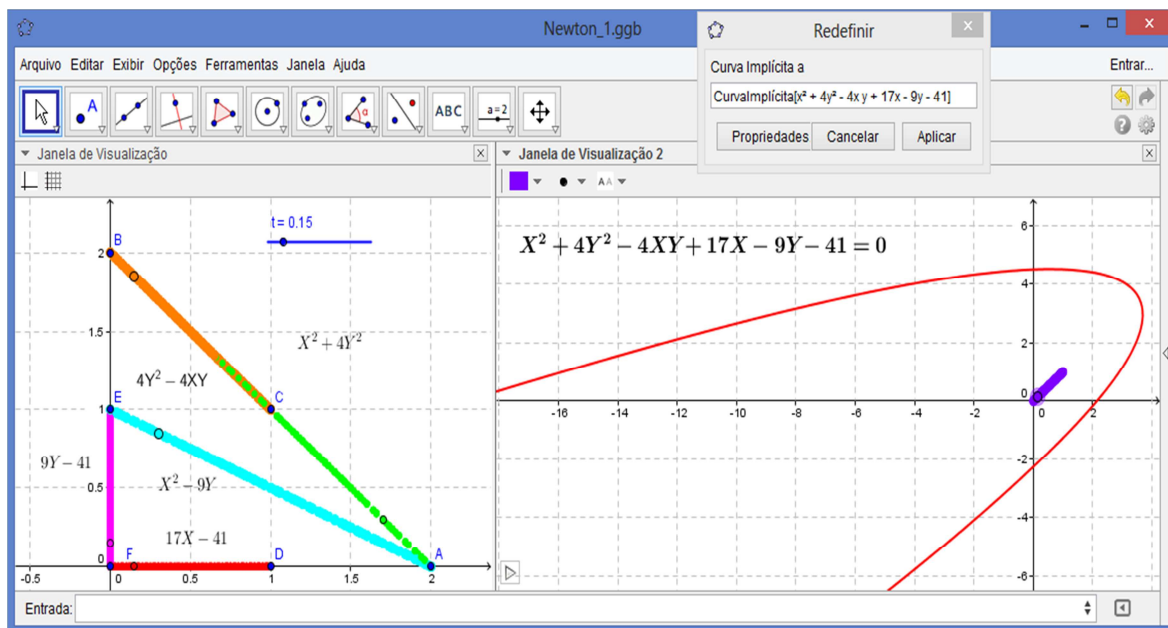


Figura 6: Situação em que o diagrama de Newton manifesta certas limitações do ponto de vista computacional

Na figura 6, ao lado direito, visualizamos o traço desta curva obtido com comandos simples do Geogebra. O caráter profícuo dessa situações (ver figuras 4,5 e 6) se manifesta na medida em que lidamos com problemas e imperfeições de um modelo, seja ela o formal da Matemática ou ainda o modelo computacional. Tendo em vista esta e outras situações passíveis de serem exploradas no contexto de ensino acadêmico, na próxima seção, traçamos alguns elementos estruturantes de uma proposta de abordagem que se funda no uso também da tecnologia.

3 Técnica computacional para o ensino de Matemática *CT²M* :

Nas seções anteriores, trouxemos alguns exemplos que envolvem o trato de certas curvas, descritas na forma implícita que podem ser descritas de forma parametrizada. O elemento invariante, relativo à cada situação problema diz respeito ao potencial de visualização e a interpretação qualitativa do objeto pretendido, na condição em que exploramos a tecnologia atual.

E nosso caso, exploramos e indicamos elementos que se mostram inexecutáveis de se tornarem elementos de uma análise, tendo em vista um entendimento heurístico de cada problema. Ademais, em cada caso,

apontamos/registramos o modelo matemático formal sobre o qual assentamos e fundamentamos todas as ilações produzidas nas seções anteriores.

Sem perder de vista nosso principal objetivo que refere-se ao ensino, apoiado na visualização de conceitos acadêmicos, indicamos/sistematizamos os seguintes aspectos:

(i) determinada teoria formal a qual possibilita o emprego de técnicas e/ou algoritmos extensos que exigem o uso de um Computational Algebraic System - CAS; (ii) certas construções gráfico-geométricas que permitem a exploração do movimento e da dinamicidade dos objetos em questão; (iii) dado à natureza intrínseca dos objetos e suas respectivas representações 2D ou 3D, empregamos um CAS; (iv) o uso de dois softwares possibilita situações do tipo $2D \rightarrow 3D$; (v) o uso de dois softwares possibilita situações do tipo $3D \rightarrow 2D$; (vi) com o uso da tecnologia impulsionamos a apreensão perceptual de propriedades reconhecidamente intrincadas.

Esses elementos permeiam/guam todas as ações executadas nas seções anteriores, que envolvem grande preocupação com a visualização, a apreensão perceptual e o entendimento tácito e primário de conceitos complexos (ALVES, 2013). Destarte, podemos proporcionar um cenário de aprendizagem, cujo elemento inicial e impulsionador da compreensão do aluno reside na intuição, e não apenas no raciocínio formal cifrado matemático.

Como indicamos nas seções anteriores, o trato eminentemente algébrico desse conteúdo garante a validade e a consistência das inferências mobilizadas, conquanto que não sustenta, seguramente, um aprendizado e entendimento heurístico de cada situação. Ademais, as limitações da tecnologia aqui apontadas servem como elementos que instigam nova investigação por parte dos aprendentes.

4 Considerações finais

O conteúdo de curvas algébricas planas possui espaço recorrente em qualquer disciplina de Cálculo a Várias Variáveis. Por outro lado, a

desconsideração da tecnologia atual para a sua abordagem desse assunto finda por envidar uma ação didática que tende a perpetuar o formalismo e a repetição pouco refletida, por parte dos estudantes, do receituário transmitido pelo *expert* no *locus acadêmico*.

Por outro lado, nas situações discutidas nas seções anteriores, indicamos um *modus* de exploração da tecnologia, tendo em vista o entendimento gráfico-geométrico de certos métodos matemático que produzem o comportamento de curvas no plano. Deste modo, exploramos propriedades do Cálculo e da família de polinômios de Bernstein. Indicamos também a aplicação do *algoritmo de Casteljau* que subdivide a curva de Bezier e, por fim, comentamos o método do polígono de Newton tendo o mesmo fim.

Ora, no que concerne à sua exploração em sala de aula, evidenciamos limitações, na medida em que buscamos o uso de dois softwares de Matemática. Sua abordagem em uma perspectiva de complementaridade (ALVES, 2013) se justifica, na medida em que, cada um deles, quer seja o Geogebra, quer seja o CAS Maple, apresentam limitações no tocante à execução de algumas tarefas relacionadas nas seções passadas.

Vale assinalar que parte dos problemas indicados aqui são oriundos de uma tentativa de exploração e visualização de objeto, cuja natureza é reconhecidamente complexa. De fato, quando lidamos com uma Matemática elementar o software Geogebra, por exemplo, costuma manifestar boa performance relativamente à execução de suas funções.

Por fim, o CT^2M constitui uma técnica de abordagem que pode alicerçar um ensino que valoriza a intuição com origem na visualização de conceitos científicos matemáticos. Na própria História da Matemática registramos forte ênfase de matemáticos profissionais, no sentido de “ver” ou “enxergar” propriedades e teoremas matemáticos.

Ora, o método que propomos aqui, que envolve a exploração em caráter de complementaridade de dois softwares, possibilita também a exploração didática de suas limitações, tendo em vista o confronto e o debate científico em sala de aula. Deste modo, o debate dialógico pelo grupo de alunos e o *expert* pode e

deve ser pautado no esforço de solução e investigação de problemas, bem como na identificação dos limites dos instrumentos utilizados em tal estudo.

Referências

- ALVES, Francisco. R. V. **Computational Technique for Teaching Mathematics - CT^2M : the quadratic forms' case**. Geogebra International Journal of Romania, v. 3, nº 2, p. 81-92, 2014a. Disponível em: <http://ggijro.wordpress.com/issues/vol-3-no-2/>
- ALVES, Francisco. R. V. **Visualizing Bezier's curves: some applications of Dynamic System Geogebra**. Geogebra International Journal of Romania, v. 3, nº 2, p. 57-68, 2014b. Disponível em: <http://ggijro.wordpress.com/issues/vol-3-no-2/>
- ALVES, Francisco. R. V. **Infinite products and infinite sums: visualizing with Dynamic System Geogebra**. Geogebra International Journal of Romania, v. 3, nº 2, p. 7-20, 2014c. Disponível em: <http://ggijro.wordpress.com/issues/vol-3-no-2/>
- ALVES, Francisco. R. V. **Viewing the roots of polynomial functions in complex variable: the use of Geogebra and the CAS Maple**. Acta Didactica Naposcencia. v. 6, nº 3, p. 45-581, 2013. Disponível em: <http://adn.teaching.ro/>
- DUNCAN, Marsh. **Applied Geometry for Computer Graphics and CAD**. Second Edition, New York: Springer, 2005.
- EDWARDS, C. H. Jr. **The Historical development of the Calculus**. New York: Springer. 1969, 362f.
- FARIN, Gerald. **Triangular Bernstein – Bezier patches. Computed Aided Geometric Design**. North-Holland. v. 3, p. 83-127, 1986. Disponível em: <http://www.ann.jussieu.fr/~frey/papers/meshing/Farin%20G.,%20Triangular%20Bernstein%20Bezier%20patches.pdf>
- FARIN, Gerald. **Curves and surfaces for CAGD: a practical guide**. Fifth edition. Arizona: Arizona State University. Morgan Kaufman Publishers, 2002.
- FORREST, A. R. **Interactive interpolation and approximation by Bezier polynomials**. The computer journal, v. 2, nº 15, p. 71-79, 1972.
- GUILLOT, Thomas. **Interpolations, courbes et Bezier, B-splines**. Bulletin de la Société des Enseignants Neuchâtelois de Science. Nº 34, Janvier, p. 1-50, 2008.
- GUIDORIZZI, H. **Um curso de Cálculo**. v. 2, 5ª edição. Rio de Janeiro: LTC, 2010.
- PRICOPIE, Steluta & UDRISTE, Constantin. **Multiplicative group law on the folium of Descartes**. Balkan Journal of Geometry and Its Applications, v. 18, nº. 1, p. 54-70. 2013. Disponível em: <http://www.mathem.pub.ro/bjga/v18n1/v18n1.htm>

ISMAIL. O. **Degree Elevation of Interval Bezier Curves**. International Journal of Video & Image Processing and Network Security. v. 13, n° 2, p. 8-11, 2013. Disponível em: http://www.ijens.org/Vol_13_I_02/134102-7171-IJVIPNS-IJENS.pdf

VAINSENER, Israel. **Introduction to Algebraic Curves**. Rio de Janeiro: SBM, 2009.

YATES, Roberts. C. **A handbook on Curves and their Properties**. Michigan: An Arbor, 1947.

YANG. Ning. **Structured matrix methods for computations on Bernstein basis polynomials** (doctoral thesis). Sheffield: Sheffield University. Disponível em: <http://etheses.whiterose.ac.uk/3311/1/Thesis.pdf>. 2013, 251f.

ZDOROV, Yu, A. **Remarkable curves**. Moscow: MIR, 1980.

WATT, Allan. **3D Computer Graphics**. Boston: Pearson Educational Limited, 2000.