ISSN 2357-724X DOI: http://dx.doi.org/10.5965/2357724X112023e0004

Artigo

Construção do conceito de integral definida em um ambiente de análise de modelos com uso de tecnologias digitais

Development of the concept of definite integral in an environment of model analysis and digital technologies

Construcción del concepto de integral definida en un entorno de aprendizaje de análisis de modelos utilizando tecnologías digitales

Emanuel Rodrigues Kapczynski[1]
[0000-0002-9956-7589]
Beatriz Helena Cordal Bueno[2]
[0000-0002-2962-1009]
Débora da Silva Soares[3]
[0000-0003-4534-3675]

Resumo
O presente estudo é de cunho qualitativo e tem como pano de fundo a proposta de um ambiente de aprendizagem de Análise de Modelos com uso de Tecnologias Digitais para o ensino de Cálculo Diferencial e Integral. Seu objetivo é analisar potencialidades do referido ambiente para o desenvolvimento de processos de pensamento matemático avançado, a partir de uma tarefa que visava orientar os estudantes em uma análise de um modelo para o movimento retilíneo uniformemente variado, a fim de trabalhar o conceito de integral definida com uso dos softwares Modellus e GeoGebra. Para tanto, foram analisadas as transcrições de discussões de uma das duplas participantes de um curso de extensão ofertado em uma universidade federal em 2019. Tal análise identificou potencialidades do ambiente proposto relacionadas aos processos de transitar entre representações mentais, traduzir e generalizar, no qual as tecnologias utilizadas tiveram um papel fundamental, assim como o design das tarefas.

Palavras-chave: Seres-Humanos-com-Mídias. Modelagem Matemática. Tecnologias Digitais. Pensamento Matemático Avançado. Cálculo Integral.

Abstract
The present study is characterized as qualitative and has as background a teaching approach based on a learning environment of Model Analysis and Digital Technologies for the teaching of Differential and

[1] **emanuelkapczynski99@gmail.com**, Licenciando em Matemática e Membro do Grupo de Estudo e Pesquisa em Educação Matemática, Modelagem e Tecnologias (GEPEMMtec), Bolsista Voluntário de IC (2018 a 2021), Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS), Porto Alegre/RS/Brasil.

[2] **biacordal@gmail.com**, Mestranda do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática (PPGEMAT) e Membro do Grupo de Estudo e Pesquisa em Educação Matemática, Modelagem e Tecnologias (GEPEMMtec), Bolsista de IC (2018 a 2021), Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS), Porto Alegre/RS/Brasil.

[3] **debora.soares@ufrgs.br**, Doutorado em Educação Matemática, Docente do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática (PPGEMAT) e Líder do Grupo de Estudo e Pesquisa em Educação Matemática, Modelagem e Tecnologias (GEPEMMtec), Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS), Porto Alegre/RS/Brasil.

Integral Calculus. Its objective is to analyse potentialities and limitations of the mentioned environment to the development of advanced mathematical thinking processes, based on an assignment that aimed to guide the students in analysing a model for the uniformly varied rectilinear motion, in order to approach the concept of definite integral using the softwares Modellus and GeoGebra. Therefore, we analysed the transcriptions of the discussions made by one of the pairs of students participating in an extension course offered in a federal university in 2019. Such analysis identified potentialities of the proposed environment related to the processes of moving between mental representations, translating and generalizing, in which the technologies used played a fundamental role, as well as the design of the tasks.

Keywords: Humans-with-media. Mathematical Modelling. Digital Technologies. Advanced Mathematical Thinking. Integral Calculus.

Resumen
El presente estudio es de carácter cualitativo y tiene como basamento la propuesta de un entorno de aprendizaje para el Análisis de Modelos utilizando Tecnologías Digitales para la enseñanza del Cálculo Diferencial e Integral. Su objetivo es analizar el potencial de ese entorno para el desarrollo de procesos de pensamiento matemático avanzado, a partir de una tarea que tuvo como objetivo orientar a los estudiantes en el análisis de un modelo de movimiento rectilíneo uniformemente variado, con el fin de trabajar el concepto de integral definida con uso de los software Modellus y GeoGebra. Para eso, se analizaron las transcripciones de la discusión de una de las parejas que participaron en un curso de extensión ofrecido en una universidad federal en 2019. Este análisis identificó potencialidades del entorno propuesto relacionadas con los procesos de movimiento entre representaciones mentales, traducción y generalización, en qué las tecnologías empleadas jugaron un papel fundamental, al igual que el design de las tareas.

Palabras claves: Seres-humanos-con-medias. Modelación Matemática. Tecnologías Digitales. Pensamiento Matemático Avanzado. Cálculo integral.

1 Introdução

O ensino e a aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral (CDI) são um foco importante de pesquisas na área de Educação Matemática. A disciplina está presente no currículo de vários cursos de graduação, em particular, da Licenciatura em Matemática. Sua presença nesses currículos deve-se, em parte, pela importância dos conceitos trabalhados e pela possibilidade de utilizá-los no estudo de situações de outras áreas científicas por meio da elaboração de modelos matemáticos (Franchi, 1995; Rasmussen; Maronguelle; Borba, 2014). Nesse sentido, Rasmussen, Maronguelle e Borba (2014), consideram que pesquisas sobre ensino e aprendizagem de CDI têm possibilidade de gerar um amplo impacto, tendo em vista que muitos estudantes ao redor do mundo cursam Cálculo. Além disso, tomando como base a literatura da área, esses autores apontam a necessidade de ampliação de pesquisas com foco em “intervenções na prática” (Rasmussen; Maronguelle; Borba, 2014, p.509).

O estudo[4] que apresentamos neste artigo contribui para essa ampliação, uma vez que toma como pano de fundo uma abordagem em sala de aula de CDI, a qual denominamos de

[4] O estudo aqui apresentado é um recorte da pesquisa desenvolvida no Projeto “Desenvolvendo conceitos de Cálculo Diferencial e Integral I com base na Análise de Modelos e no uso de Tecnologias Digitais: tensões

ambiente de aprendizagem de *Análise de Modelos com uso de Tecnologias Digitais*, que favorece a interdisciplinaridade e o diálogo no processo de aprendizagem. Essa abordagem toma como base o que foi desenvolvido em Soares (2012a) e, usando ciclos de análise inspirados no *design research* (Doerr; Wood, 2006), teve outras duas versões desenvolvidas (Soares; Vier, 2017a; Soares; Vier, 2017b) antes da que ora apresentamos.

Para o presente estudo, nos propomos a analisar potencialidades do ambiente de aprendizagem de Análise de Modelos com o uso de Tecnologias Digitais para o desenvolvimento de processos de pensamento matemático avançado (Dreyfus, 2012), dando enfoque à construção do conceito de integral definida. Para tanto, consideramos como contexto um curso de extensão ofertado em Fevereiro de 2019 para alunos de Licenciatura em Matemática de uma universidade federal. Com uso majoritário do software Modellus[5] e também do GeoGebra[6] em uma tarefa, propusemos a análise de um modelo de movimento retilíneo uniformemente variado (MRUV), a qual foi orientada por tarefas que visavam o desenvolvimento dos conceitos da disciplina. Neste texto, consideramos uma das tarefas propostas no curso, cujo objetivo era trabalhar o conceito de integral definida.

Apresentamos, na sequência, uma breve revisão das teorias que embasam o trabalho, ao que se seguem a metodologia adotada no estudo e a análise dos diálogos de uma das duplas durante a realização das tarefas.

2 Referencial teórico

A abordagem pedagógica que embasa o presente estudo tem como ideia central desenvolver conceitos de CDI de forma inter-relacionada com o estudo de um (ou mais) modelo(s) matemático(s) para algum fenômeno de interesse. Nesse sentido, a Análise de Modelos se caracteriza como uma prática na qual se faz o estudo de um modelo matemático já existente, com discussões acerca de variados aspectos do mesmo, como apontado por Javaroni e Soares (2012, p. 271):

> (i) estudo do fenômeno em questão; (ii) estudo das hipóteses consideradas para a elaboração do modelo; (iii) entendimento do que cada termo do modelo diz sobre o fenômeno; (iv) estudo do comportamento da(s) solução(ões) do modelo, relacionando este comportamento com o fenômeno e com as hipóteses consideradas; (v) estudo da influência dos parâmetros do modelo no comportamento de sua(s) solução(ões), o que permite fazer previsões e analisar a influência de possíveis intervenções no fenômeno; (vi) análise das limitações do modelo.

Ao longo desse processo, de forma simultânea, conceitos de CDI vão sendo introduzidos e desenvolvidos com os estudantes. Isso pode ocorrer a partir da proposição de tarefas que orientam o trabalho dos alunos nestas duas frentes: analisar e compreender o fenômeno e seu modelo, e investigar e construir o conceito matemático relacionado. Assim, como apontado em Soares (2015, p. 458, tradução nossa), "ao se trabalhar com a Análise de

---

emergentes", coordenado pela Profa. Dra. Débora da Silva Soares. O objetivo dessa pesquisa era analisar produções de estudantes nesse ambiente, bem como potencialidades e limitações da abordagem.

[5] Software destinado ao ensino-aprendizado de Física. O download da versão 4.01 pode ser feito em: <https://docente.ifrn.edu.br/alessandrorolim/informatica-aplicada-a-fisica/software-modellus-4.01/view> (Acesso em 18 jan. 2021).

[6] Software livre de Matemática Dinâmica. Website: <https://www.geogebra.org/> (Acesso em 18 jan. 2021).

Modelos, nota-se o desenvolvimento de um ciclo rudimentar de modelagem, com foco na transição da situação do modelo para o modelo matemático e sua interpretação”.

Nesse processo, o uso de softwares pode permitir o contato dos estudantes com modelos mais acurados, para cuja interpretação podem ainda não dispor de todos os conhecimentos necessários. Nesses casos, o software pode "desempenhar" papéis fundamentais, como: dar aos estudantes acesso às soluções do modelo em diferentes representações e permitir experimentações de diferentes cenários para o fenômeno e também de diferentes aspectos relacionados aos conceitos matemáticos (Borba; Soares, 2014), e participar de atos dialógicos como desafiar e validar (Soares; Vier, 2017a). Nesse sentido, podemos afirmar que o uso de software *reorganiza* o ciclo de modelagem (Soares, 2015).

A noção de *reorganização* está ancorada no construto seres-humanos-com-mídias, proposto por Borba e Villarreal (2005). O ser humano, no processo de construção de seu saber, está inserido em um contexto histórico, cultural e material; sendo assim, dispõe de artefatos que, com possibilidades e limitações, medeiam sua relação com o mundo e os outros indivíduos. Tendo isso em mente, Borba e Villarreal (2005) propõem que o conhecimento é construído não pelo indivíduo isoladamente ou por uma comunidade formada unicamente por seres humanos, mas sim por um coletivo composto por seres-humanos-com-mídias ou seres-humanos-com-tecnologias.

Dentro desse coletivo, há um processo de moldagem recíproca (Borba; Villarreal, 2005), em que o indivíduo se utiliza das mídias de acordo com suas necessidades e conhecimentos prévios e, através dos feedbacks oferecidos pelas mídias, tem seu pensamento reorganizado. Esse processo de interação se mostra imprevisível e não mecanicista pois, por ter relação com as necessidades e o contexto dos sujeitos, o uso das mídias pode ocorrer de maneira diferente de como foi planejado por quem a desenvolveu.

Ainda, as tecnologias não se mostram “superiores” a mídias mais tradicionalmente usadas, tais como lápis-e-papel ou a própria oralidade. Nesse sentido, como apontado por Borba e Penteado (2016, p. 64), “lançar mão do uso de tecnologia informática não significa necessariamente abandonar as outras tecnologias. É preciso avaliar o que queremos enfatizar e qual a mídia mais adequada para nosso propósito”. O uso dessas mídias pode, inclusive, coexistir, permitindo abordagens nas quais os conceitos são explorados sob diferentes perspectivas.

Dessa forma, ao se pensar no uso de tecnologias digitais no Ensino da Matemática, essas não são vistas como simples facilitadoras, mas sim, como atrizes que estruturam a atividade e o pensamento dos sujeitos, possibilitando novas formas de aprendizagem. É nesse sentido que entendemos que o uso de software reorganiza o ciclo de modelagem quando trabalhado de forma articulada à Análise de Modelos.

Ainda, consideramos que os pressupostos que embasam o construto seres-humanos-com-mídias estão alinhados à Análise de Modelos, uma vez que ambos enfatizam o papel ativo do estudante, a experimentação e a investigação. Deste modo, consideramos o ambiente de aprendizagem de Análise de Modelos com o uso de Tecnologias Digitais aquele que articula o estudo de modelos matemáticos com o uso de tecnologias digitais, por meio de tarefas que envolvem investigação, experimentação, exploração de estratégias e construção de conceitos matemáticos que sejam novos para o estudante.

Tendo em vista que propusemos esse ambiente para o ensino e a aprendizagem de CDI, consideramos alguns aspectos acerca do pensamento matemático avançado apresentado por Dreyfus (2002). O autor defende que “não existe uma distinção bem definida entre muitos dos processos de pensamento matemático elementar e avançado, apesar de a matemática avançada possuir um foco maior nas abstrações de definição e dedução” (Dreyfus, 2002, p. 26, tradução nossa). Portanto, mesmo que haja semelhanças, percebe-se uma diferença de ênfase no que se refere à abstração; entretanto, o modo como a Matemática é desenvolvida pode não propiciar a construção da flexibilidade de conhecimento necessária para atingir tais capacidades próprias dessa forma de pensamento. A exposição de uma Matemática pronta e lapidada facilita a organização e distribuição dos assuntos a serem tratados ao longo do tempo disponível, mas obscurece os processos intuitivos pelos quais se constroem os conhecimentos matemáticos em um primeiro momento. Dessa forma, faz sentido que estudantes apresentem compreensões limitadas, já que “foram ensinados a eles produtos das atividades de matemáticos em sua forma final, mas não foi proporcionado insight sobre os processos que levaram matemáticos a criarem esses produtos” (Dreyfus, p. 28, tradução nossa).

Tendo isso em mente, a proposta trazida no presente trabalho se apresenta como uma forma de propiciar o surgimento desse tipo de *insight*, bem como de incentivar compreensões conceituais que relacionem diferentes representações. Não esperamos que um curso de 20 horas seja suficiente para, por si só, desenvolver toda a complexidade do pensamento, já que o processo para entender algo ocorre, em geral, “[...] baseado em uma longa sequência de atividades de aprendizado durante as quais uma grande variedade de processos mentais ocorrem e interagem” (Dreyfus, p. 25, tradução nossa). Contudo, como apresentamos na sequência, a análise das discussões dos estudantes revelou potencialidades para o desenvolvimento do pensamento matemático avançado, que podem ser de valor para o ensino de CDI, apontando para a possibilidade de desenvolvimento de atividades semelhantes em disciplinas regulares.

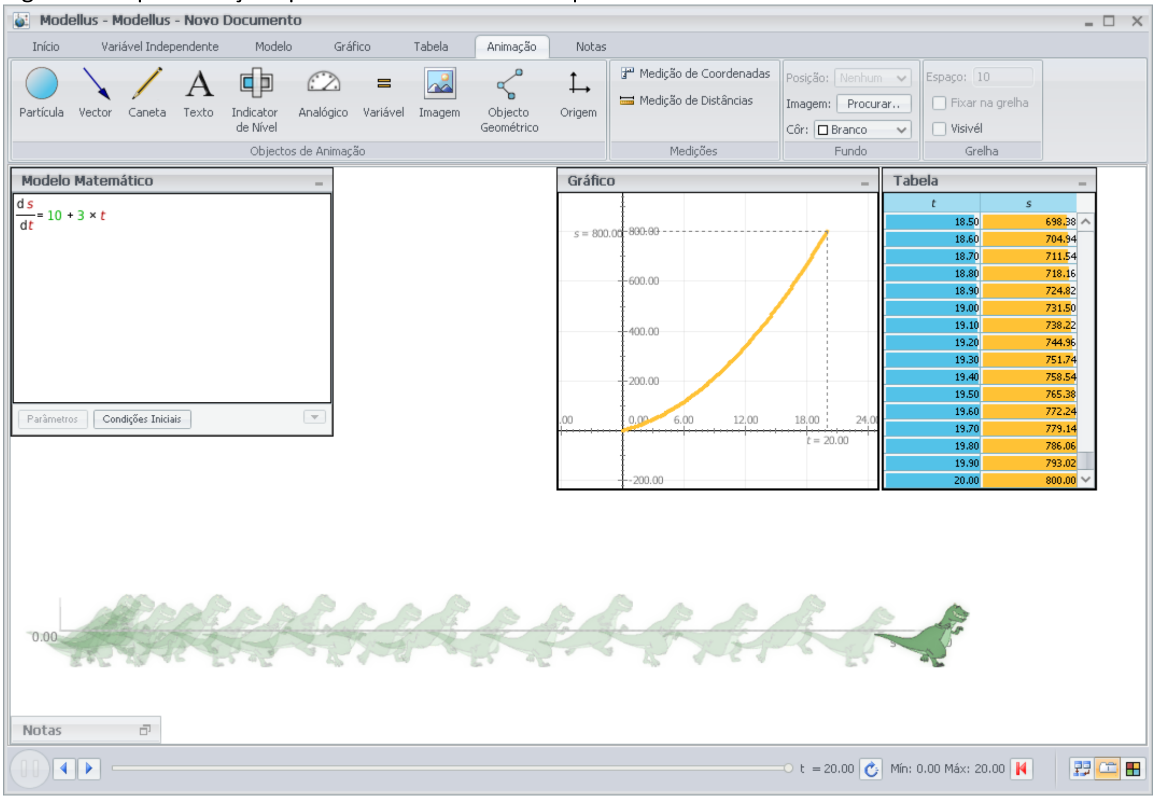
3 Metodologia

Conforme apresentado anteriormente, o objetivo deste artigo é analisar potencialidades do ambiente de aprendizagem Análise de Modelos com o uso de Tecnologias Digitais para o desenvolvimento de processos de pensamento matemático avançado (Dreyfus, 2002) ao longo de uma tarefa cujo objetivo era trabalhar o conceito de integral definida. Deste modo, o presente estudo é do tipo qualitativo (Bogdan; Biklen, 1994), uma vez que tem como foco compreender a situação em suas múltiplas dimensões, priorizando os processos envolvidos.

O contexto do estudo foi um curso de extensão oferecido para alunos de Licenciatura em Matemática de uma universidade federal. Participaram 13 estudantes, que responderam previamente a um questionário de perfil, no momento da inscrição. Dois dos participantes já haviam cursado disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral e, por esse motivo, sua produção ao longo do curso não foi considerada como dados para a pesquisa. Inicialmente, pedimos aos alunos que se dividissem em duplas ou trios para discutir as tarefas, as quais foram compartilhadas por e-mail através de uma pasta no Google Drive. Também solicitamos que cada dupla/trio criasse um documento nessa mesma pasta para a elaboração de um relatório com as observações feitas a respeito das questões das tarefas. Além disso, pedimos que gravassem, com seus celulares, os áudios de suas discussões.

O curso foi desenvolvido em cinco encontros de 4 horas cada, totalizando 20 horas, distribuídos ao longo de uma semana, em fevereiro de 2019. As discussões foram orientadas por um total de oito tarefas, em sua maioria tendo como objeto de estudo um modelo para o MRUV descrito pela Equação Diferencial Ordinária $\frac{ds}{dt} = 10 + 3t$, em que s representa o deslocamento em metros, e t o tempo em segundos. As tarefas orientavam a inserção do modelo no software Modellus, o qual permite acesso a representações de sua solução na forma gráfica, tabular e em uma animação, como mostrado na imagem a seguir (Figura 1). Neste artigo, o foco de análise será a tarefa que teve como objetivo introduzir o conceito de integral definida, a qual apresentaremos em detalhes na próxima seção.

Figura 1 - Representações para o modelo fornecidas pelo software Modellus.



Fonte: Elaboração própria.

Escolhemos para análise os dados produzidos por uma das duplas participantes, a cujos indivíduos faremos referência como Participante 1 (P1) e Participante 2 (P2). Tal escolha deveu-se ao nível de interação entre os componentes, percebido durante a realização das atividades. No formulário de inscrição, ambos afirmaram estar no terceiro semestre do curso de Licenciatura em Matemática, não tendo ainda cursado Cálculo. Os áudios gravados pelos componentes da dupla foram coletados e transcritos. Infelizmente, alguns momentos das discussões não foram gravados pela dupla, e assim não obtivemos acesso a certos trechos, os quais serão apontados ao longo da análise. Tal análise foi feita com base na concepção de processos de pensamento matemático avançado identificados por Dreyfus (2002). Na sequência, apresentamos a tarefa sobre integral definida, já mesclando com excertos dos diálogos desenvolvidos pelos alunos ao resolverem a tarefa proposta.

4 Apresentação e análise dos dados

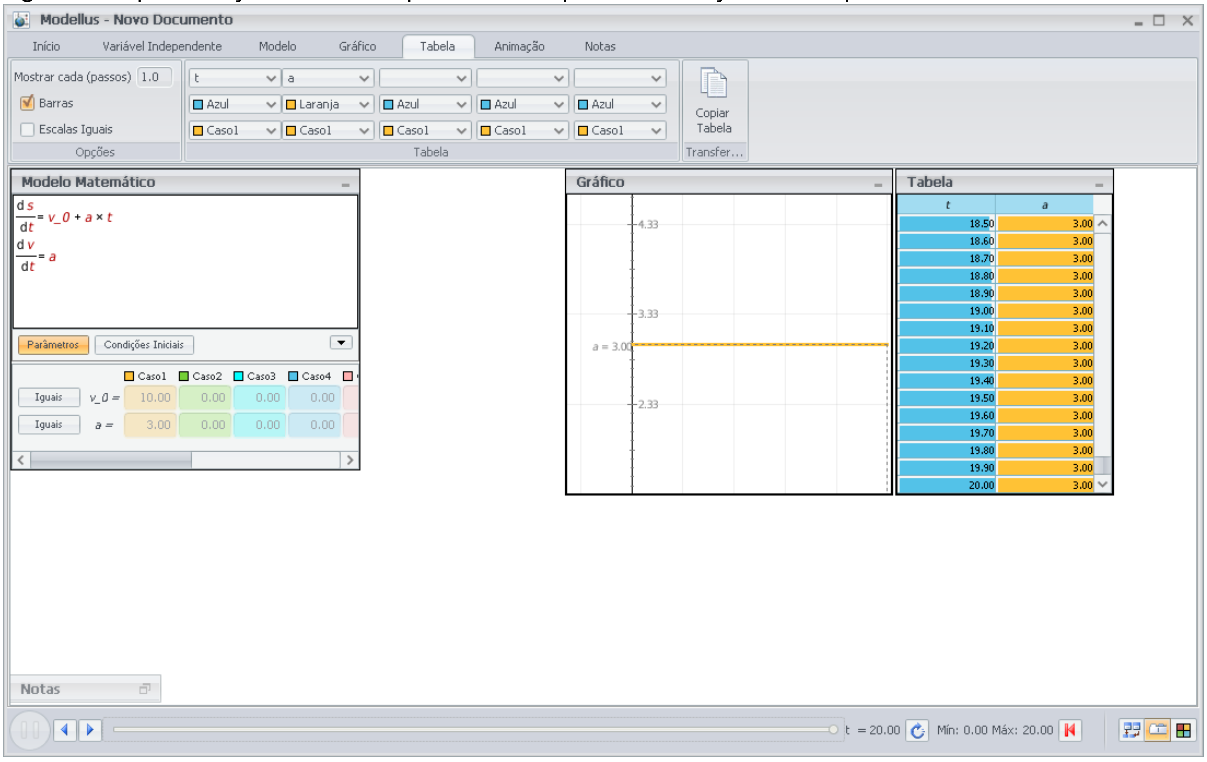
A tarefa 4, que buscava desenvolver o conceito de integral definida, foi proposta depois das tarefas de exploração do modelo e de derivada, sugerindo, em seu texto introdutório, que se fizesse o processo "inverso", ou seja, que fosse calculada a variação da velocidade do Dino a partir da aceleração. Para tanto, eram dadas as instruções para inserir no software Modellus o seguinte modelo matemático:

$$\frac{ds}{dt} = v_0 + at$$

$$\frac{dv}{dt} = a$$

tendo como parâmetros os valores $v_0 = 10 \;\; a = 3$, e como condições iniciais $s = 0$ e $v = 10$. O gráfico e a tabela deveriam ser configurados para exibir a aceleração, de forma que o software oferecesse a seguinte visualização:

Figura 2 - Representações oferecidas pelo software para a aceleração com respeito ao modelo em estudo.



Fonte: Elaboração própria.

A partir disso, foram propostas as seguintes questões:

Quadro 1 - Questões 1 e 2 da tarefa sobre integral definida.

1) Considere agora o gráfico $a \times t$. É possível, a partir desse gráfico, determinar a variação da velocidade do Dino em um intervalo de tempo? De que modo você faria isso? Por favor, justifique sua estratégia. 2) Considerando que $a = dv/dt$, como você visualizaria esta informação (variação da velocidade) no gráfico de $a \times t$?

Fonte: Elaboração própria.

No início da discussão sobre a tarefa, o Participante 1 tem um estranhamento com a visualização fornecida pelo software:

P1: [inaudível] eu não tô vendo o gráfico. Tá estranho isso daí.
P2: Esse daqui é o gráfico…
P1: Será que a gente não fez nada errado, tá muito estranho.
P2: Acho que não. Era constante, aceleração é constante.
(Diálogo entre os participantes, 2019)

Neste trecho, não fica claro se P1 não está compreendendo o motivo de o gráfico ser constante ou se sua dificuldade é interpretar o que o modelo está dizendo. P2 afirma que o gráfico é constante por conta do fato de a aceleração ser constante, mas P1 parece não estar convencido. Retornando à tarefa, P2 evoca uma informação vaga que possui sobre o assunto:

P2: Sei lá, uma coisa que eu acho viável é calcular a área.
P1: A área?
P2: É. Porque eu sei que alguma coisa desse lance de integral, derivada tem… pra calcular a área.
P1: [inaudível] ele me falou, que… Cadê… Deixa eu dar uma voltada, logo lá no começo, aqui, ó. Que… aceleração média igual… o delta… v sobre delta t. Nesse caso a gente tem o delta t e o a. A gente não tem só, não tem o v. Então a gente pode dizer que...
P2: Que seria a velocidade?
P1: É, isso, que o delta v...
P2: Que a velocidade em cada tempo [inaudível]
P1: Que é a ace… que é a aceleração vezes o tempo. Não é? Ó.
P2: Sim.
P1: Então a velocidade seria… o a eme [a_m] *vezes o delta t. Porque a gente só… a gente não tem a velocidade, a gente tem só…*
P2: Mas é a velocidade que a 1 quer, né? Como que a gente calcularia a velocidade?
P1: Sim… Ó, ele usou a mesma… olha a palavra que ele usou, ó.
P2: Variação da velocidade.
P1: Sim, o delta da velocidade, que é a variação da velocidade.
P2: Sim.
(Diálogo entre os participantes, 2019)

P2 recorre a uma intuição prévia, de que algo deveria estar relacionado com o cálculo da área. Contudo, isso parece ser apenas a tentativa de reprodução de uma definição do conceito de integral definida vista em algum lugar. Apesar de não ter compreendido bem o gráfico, P1 recorre a noções algébricas para procurar uma forma de calcular a velocidade a partir da aceleração e do tempo. Além disso, parece haver uma certa confusão com as ideias de velocidade em cada tempo e variação de velocidade, causando uma certa dificuldade ao desenvolvimento das relações. Após alguns instantes de silêncio, P1 pede que P2 abra o gráfico novamente, e analisa-o com mais cuidado:

P1: Tem como tu botar ali no...
P2: No gráfico?
P1: Isso. O que que ele… O gráfico ele nos dá...
P2: Deu a...
P1: A aceleração é constante.
P2: Sim.
P1: Porque é três… Vai ser sempre três.
P2: Sim.
(Diálogo entre os participantes, 2019)

Nesse trecho, P1 compreende o gráfico, cujo sentido não tinha ficado claro anteriormente. P1 diz que vai fazer alguns rabiscos e, após alguns instantes, tenta expressar seu pensamento:

P1: É possível, sim. Pois, a partir desse gráfico… Pois… A gente pode tirar do gráfico… A gente sabe… Pois a partir do gráfico tu consegue ver a aceleração...
P2: Que nesse caso é sempre constante.
P1: E o tempo. E aí determinar… O intervalo de… e o tempo, então pra gente achar a velocidade a gente teria que multiplicar a aceleração pelo tempo.
P2: Sim.
P1: E a gente saberia qual é a velocidade.
P2: Que seria calcular a área, não? Porque tu tem o três, a aceleração, e tu tem o tempo.
P1: É.
P2: Isso daí seria um retângulo, então tu vai tá multiplicando os dois lados.
P1: Sim.
P2: Faz sentido?
P1: É a área desse gráfico, então?
P2: É.
(Diálogo entre os participantes, 2019)

A partir de seu pensamento baseado em representações algébricas, P1 interpreta as relações entre as variáveis tempo e aceleração, enquanto P2 mantém seu foco na interpretação da situação tomando o gráfico como base. A discussão entre a dupla, aqui, permitiu que as representações mentais de variação da velocidade evocadas por cada um se complementassem, levando a um pensamento que considera como as diferentes representações se relacionam. Depois desse momento, P1 percebe que essa discussão já responde o item 2, e sua fala leva P2 a uma tentativa de generalização:

P1: Eu acho que essa daí é o que tu falou. Da área. Eu acho que é. Porque ela botou "visualiza". Como é que tu visualiza essa informação?
P2: Pode ser.
P1: A área do retângulo.

P2: É, não só do retângulo eu acho, tá, aqui deu o acaso de a unidade [inaudível] ser a mesma, mas eu acho que pode ser qualquer… qualquer coisa que tiver. Qualquer figura formada.
P1: É, mas vai ser sempre algo...
P2: A área da figura?
P1: Que não vai ter curva né? Vai ser sempre...
P2: Será que não?
P1: Acho que não… Só se mudasse né? Porque tá fixa a aceleração.
P2: Sim.
P1: Se ela variasse.
(Diálogo entre os participantes, 2019)

É interessante observar que, nos excertos apresentados até o momento, percebe-se uma tendência do participante P1 em utilizar raciocínios baseados em representações algébricas, enquanto que P2 apresentou uma tendência a utilizar raciocínios baseados em representações geométricas.

Esta tendência também pôde ser verificada nas respostas que eles forneceram ao questionário de perfil, quando questionados acerca de suas experiências com o conteúdo de funções. O Participante 1 respondeu: "Tive dificuldades em visualizar de forma mais dinâmica o comportamento de determinadas [funções], e a facilidade foi poder usar os softwares para auxiliar nessa visualização que até então era bem difícil para mim". O Participante 2, por sua vez, afirmou: "Tenho facilidade quanto a mexer em gráficos e um pouco de dificuldade com a parte algébrica".

A partir dessas respostas e da análise dos excertos, percebemos uma diferença nas *representações mentais* que configuram as noções de função e de variação da velocidade dos dois estudantes. De acordo com Dreyfus (2002, p.31) uma representação mental "[...] se refere a esquemas ou estruturas internas que uma pessoa usa para interagir com o mundo exterior. É o que ocorre na mente quando se pensa sobre aquela parte em particular do mundo exterior e pode ser diferente de pessoa para pessoa". Ainda, segundo este autor, "para se ter sucesso em Matemática, é desejável ter representações mentais ricas dos conceitos" (Dreyfus, 2002, p.32), isto é, representações que tenham conectados vários aspectos de um conceito, permitindo flexibilidade na resolução de problemas. Mais ainda, esta flexibilidade depende também do transitar entre as diferentes representações de um mesmo conceito, uma vez que, durante a resolução de um problema, possivelmente será necessário trocar de representação para avançar em sua resolução.

Essa necessidade decorre das diferentes potencialidades que cada representação oferece. Tall (1993, p. 9, tradução nossa) aponta que "gráficos dão insights qualitativos globais, enquanto números dão resultados quantitativos e símbolos dão uma poderosa habilidade de manipulação", ressaltando a necessidade de um movimento versátil entre tais representações. Porém, o desenvolvimento dessa capacidade de estabelecer relações não é algo simples, como observado por Dreyfus (2002, pp.32-33):

> Ensinar e aprender este processo de transitar não é fácil porque a estrutura é algo muito complexo; [...] Como consequência, os estudantes frequentemente se limitam a trabalhar com apenas uma representação; por exemplo, mesmo quando eles são orientados a desenhar um esboço, digamos que antes de integrar uma função de valor absoluto, eles frequentemente ignoram seu próprio esboço e então falham em resolver o problema corretamente (Mundy, 1984). Uma possível abordagem é usar sistematicamente várias representações no ensino e enfatizar o processo de

> transitar entre as representações desde o início. Ambientes computacionais têm sido utilizados com sucesso nos currículos para funções, (Schwarz, Dreyfus & Bruckheimer, 1990), Cálculo (Tall, 1986a, 1986b), e equações diferenciais (Artigue, 1987).

Aprender a transitar entre diferentes representações mentais é, portanto, um aspecto que precisa ser trabalhado com os estudantes. E é nesse ponto que identificamos uma primeira potencialidade da abordagem com Análise de Modelos e uso de Tecnologias Digitais que propusemos: o uso de um software que apresenta diferentes representações da situação estudada - modelo matemático, gráfico e tabela das soluções, animação - de forma articulada a questionamentos que instigam o estudante a relacionar diferentes representações de um mesmo conceito para resolver o que é proposto, sem perder de vista o fenômeno que está sendo analisado.

Por exemplo, quando P1 afirma que "então pra gente achar a velocidade a gente teria que multiplicar a aceleração pelo tempo" e P2 responde "Que seria calcular a área, não?", observamos uma oportunidade fornecida pela abordagem proposta para que os estudantes pudessem expor suas estratégias de resolução e relacionar diferentes representações mentais de uma mesma situação. Esta relação também é estimulada pelos questionamentos feitos na tarefa, conforme P1 apresentou: "Eu acho que essa daí é o que tu falou. Da área. Eu acho que é. Porque ela botou "visualiza". Como é que tu visualiza essa informação?".

Deste modo, apesar de, inicialmente, cada um dos participantes estar limitado a uma representação mental específica, o diálogo permitiu que um auxiliasse o outro a refletir acerca da situação proposta e a articular a sua própria representação mental com a representação mental do outro. Não é possível afirmar que este movimento ocorreu a todo o momento e com todos os participantes, porém, temos um exemplo que sugere a potencialidade da abordagem para o trabalho sistemático com diferentes representações e a transição entre elas, o qual poderá ser expandido com intervenções do(a) professor(a).

Uma segunda potencialidade da abordagem de Análise de Modelos com o uso de Tecnologias Digitais que identificamos, e que pode ser destacada nos diálogos apresentados até o momento, é o processo de traduzir. De acordo com Dreyfus (2002, p.33, tradução nossa), "Um significado para traduzir que é relevante para o pensamento matemático avançado é passar de uma formulação de um enunciado ou problema matemático para outra".

Nos excertos anteriores, observamos que ocorreu uma tradução logo no início do trabalho dos alunos: para possibilitar a transição do gráfico para a manipulação algébrica, foi necessário que os participantes partissem da pergunta apresentada no enunciado para um questionamento que envolvesse as variáveis, o qual poderia ser formulado como "Qual a relação entre aceleração, velocidade e tempo?". No caso de P1, esse processo precede a própria compreensão do gráfico, e pode ser ilustrado por sua busca de relações entre as variáveis: "Que… aceleração média igual… o delta… v sobre delta t. Nesse caso a gente tem o delta t e o a. A gente não tem só, não tem o v". Neste momento, há também a necessidade da presença de representações mentais relacionadas ao fenômeno em estudo, para que seja possível perceber as relações entre tais variáveis e compreender seu significado.

O passo seguinte é o das manipulações algébricas, momento no qual Kaput (1999, p. 10, tradução nossa) observa que "nossa atenção está nos símbolos e nas regras sintáticas para sua manipulação, e não no que eles podem representar". Isso permite a realização de operações complexas, que representariam um grande obstáculo caso fosse necessário levar em conta o referente a todo o momento.

No contexto da dupla, é possível estabelecer assim a relação entre as variáveis, trazida pela fala de P1: "Que é a ace… que é a aceleração vezes o tempo. Não é? Ó". Esse enunciado, na sequência, precisa ser reformulado a partir da percepção de que a região delimitada sob a curva da aceleração é um retângulo e, portanto, o produto de sua base e sua altura fornece o valor da área. Como sua base e sua altura são, respectivamente, a variação no tempo e a aceleração, tem-se que a variação da velocidade deve corresponder à sua área. Contudo, um dos participantes não havia compreendido o sentido do gráfico nesse momento, inviabilizando a possibilidade de conexão entre o sentido encontrado e a interpretação visual. Superada a dificuldade, a relação entre o resultado algébrico e a representação visual é obtida, em um momento no qual cada um dos participantes busca complementar as observações um do outro:

> *P1: É possível, sim. Pois, a partir desse gráfico… Pois… A gente pode tirar do gráfico… A gente sabe… Pois a partir do gráfico tu consegue ver a aceleração...*
> *P2: Que nesse caso é sempre constante.*
> *P1: E o tempo. E aí determinar… O intervalo de… e o tempo, então pra gente achar a velocidade a gente teria que multiplicar a aceleração pelo tempo.*
> *P2: Sim.*
> *P1: E a gente saberia qual é a velocidade.*
> *P2: Que seria calcular a área, não? Porque tu tem o três, a aceleração, e tu tem o tempo.*
> *P1: É.*
> *P2: Isso daí seria um retângulo, então tu vai tá multiplicando os dois lados.*
> (Diálogo entre os participantes, 2019)

Ainda com relação ao processo de traduzir, Dreyfus (2002, p.33, tradução nossa) afirma que:

> Problemas aplicados são um caso em questão. [...] Não apenas o estudante tem que entender o contexto do problema aplicado, por exemplo um circuito elétrico, mas mais importante, ele precisa estabelecer uma correspondência estreita e clara entre quantidades referidas em termos de circuitos elétricos e quantidades referidas em termos de equações diferenciais. Esta correspondência pode ser óbvia para o professor, mas para o estudante a construção de esquemas mentais apropriados é uma tarefa difícil, que precisa ser apoiada por ações explícitas do professor.

Entendemos que a abordagem da Análise de Modelos com o uso de Tecnologias Digitais pode ser considerada como "ações explícitas do professor" para apoiar estes processos, na medida em que instiga o estudante a refletir sobre os conceitos matemáticos sem esquecer do fenômeno que está sendo analisado.

Retomando a apresentação da Tarefa 4, após apresentar o problema de determinar a variação da velocidade do Dino a partir do gráfico da aceleração em relação ao tempo de uma forma bastante aberta, a questão 3, na sequência, sugeria o cálculo da área sob a curva da aceleração como forma de obter a variação da velocidade. Para explorar o tema, a seguinte tabela (Quadro 2) deveria ser preenchida de modo que, ao final, pudessem comparar o valor da área sob o gráfico da aceleração em diferentes intervalos de tempo (regiões retangulares, já que o gráfico é de uma função constante) e o valor da variação da velocidade determinada a partir das velocidades instantâneas representadas na tabela fornecida pelo software.

Quadro 2: Tabela e itens a e b relativos à questão 3.

3) Uma possível estratégia que nos ajuda a responder a pergunta anterior é lembrarmos que $a_m = \Delta v / \Delta t$ donde segue que $\Delta v = a_m \cdot \Delta t$. No gráfico de $a \times t$, isso corresponde à área da região delimitada pelo gráfico da função $a(t)$, pelo eixo das abscissas, e pelas retas verticais que definem o intervalo de tempo. Vamos observar essa relação a partir do preenchimento da tabela abaixo, cuja primeira coluna corresponde a um intervalo de tempo dado Δt, a segunda coluna deve ser preenchida com o cálculo $\Delta v = a \cdot \Delta t$, e a terceira coluna deve ser preenchida com o cálculo $\Delta v = v_f - v_0$, onde v_f significa o valor da velocidade do Dino no instante final do intervalo de tempo dado. Você pode usar a tabela de $v \times t$ para encontrar o valor de v_f em cada intervalo.

$\Delta t = [0, t_f]$	Área da região delimitada por $a(t)$, eixo horizontal, reta $t = 0$ (eixo vertical), e reta $t = t_f$	$\Delta v = v_f - v_0$
$[0,1]$		
$[0,2]$		
$[0,3]$		
$[1,2]$		

Com base no preenchimento e na análise da tabela acima, por favor, comente sobre:
a) Que forma geométrica tem a região para a qual se calculou a área nos intervalos do tipo $[0, t]$? E para o intervalo $[1,2]$?
b) Em geral, como seria o cálculo da variação da velocidade em um intervalo do tipo $[0, t]$ a partir da área sob a curva $a(t)$ acima? E para um intervalo qualquer $[t_0, t]$?

Fonte: Elaboração própria.

Devido ao espaço de que dispomos para o texto, não iremos apresentar o diálogo dos estudantes em detalhes para a resolução desta questão. Entretanto, observamos que eles conseguiram realizar o cálculo da área sob a curva sem maiores dificuldades. Apesar disso, confundiram-se com o valor da velocidade inicial (consideraram $v_0 = 0$, em vez de $v_0 = 10$) e também tiveram dificuldades para compreender exatamente o que era pedido na tarefa, de modo que a relação da área com a variação de velocidade não foi evocada, mesmo esta já tendo sido percebida anteriormente.

Dando sequência à tarefa, as questões 4, 5 e 6 visavam levar a uma generalização da estratégia para cálculo da área sob curvas.

Quadro 3: Questões 4, 5 e 6 da tarefa sobre integral definida.

4) Considere, agora, o gráfico e a tabela de $v \times t$. Como determinar, a partir desse gráfico, o deslocamento do Dino em determinado intervalo de tempo? Explique sua estratégia, justificando suas respostas.

5) Considere, agora, o gráfico e a tabela de $s \times t$. Apesar de não haver uma interpretação física, como poderíamos estimar a área de uma região R delimitada pela curva $s(t)$, pelo eixo das abscissas e pelo intervalo $[a, b]$? Descreva sua estratégia e justifique sua resposta.

6) É possível usar a mesma estratégia definida no item (5) para calcular a área sob o gráfico de qualquer outra função? Se não, você consegue pensar em outra estratégia que poderia ser generalizada?

Fonte: Elaboração própria.

Na questão 4, P1 retorna ao uso de representações algébricas para desenvolver alguma interpretação a fim de chegar ao que é pedido. Por sua vez, P2 mostra certa resistência a esse pensamento, entendendo que apenas o gráfico deveria ser utilizado:

> *P1: Sabemos que… velocidade é igual posição sobre tempo. Lembra disso? Velocidade é igual a variação da posição sobre a variação do tempo.*
> *[...]*
> *P1: Como determinar a partir desse gráfico. O que que a gente tem, a gente consegue a velocidade, e o tempo.*
> *P2: Sim.*
> *P1: Então a gente tem a posição.*
> *P2: Mas a partir do gráfico. Sem nenhuma equação.*
> *P1: Hum. Vamos, vamos explorar esse gráfico.*
> (Diálogo entre os participantes, 2019)

Destacamos que, no trecho apresentado, P1 retoma o uso de representações algébricas, a partir de mais um processo de tradução. Contudo, o conceito utilizado aqui desconsidera que a velocidade não é constante, assumindo um único valor (o da velocidade média) para desenvolver seu raciocínio. Isso pode, porém, ter sido causado por problemas na configuração do software, já que na sequência a dupla fica com dúvidas acerca de qual gráfico usar (posição, velocidade, ou aceleração), e pede ajuda ao monitor para configurar o software.

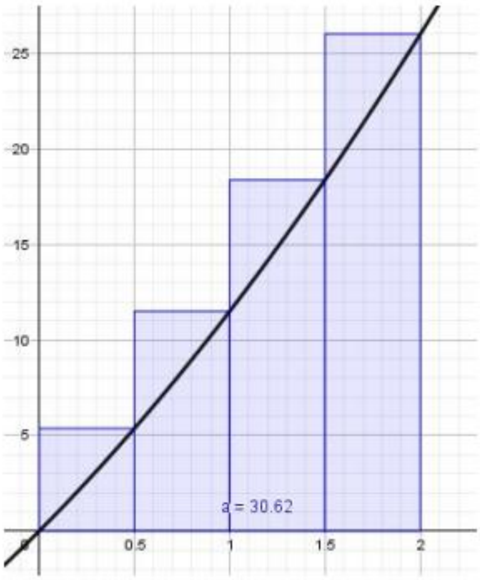
Outro ponto que merece destaque é a condição colocada por P2: "Mas a partir do gráfico, sem nenhuma equação". Tal movimento vai em direção contrária ao problema com representações de função apontado por Einsenberg (2002, p. 146): apesar de parecer natural interpretar muitos aspectos de funções visualmente, estudantes "parecem presos ao processamento de informações e resolução de exercícios de forma analítica, não visual". O autor aponta, também, que historicamente as compreensões visuais e intuitivas tiveram uma perda de espaço, o que se reflete em sala de aula na visão de estudantes de que a Matemática é essencialmente analítica. Em se tratando do Cálculo, Eisenberg (2002) cita estudos que reforçam essa dificuldade, inclusive no que se refere à capacidade dos estudantes de utilizar gráficos esboçados por eles mesmos.

Tendo isso em mente, acreditamos que o comentário de P2 destacado anteriormente aponta para uma potencialidade da Análise de Modelos à medida que revela o resultado de um incentivo ao direcionamento da atenção para representações visuais tanto de função como do próprio fenômeno (simulação por animação). Tal ênfase pode abrir espaço para um aprendizado que aceita o pensamento intuitivo como parte do processo, abrindo caminho para a posterior formalização dos conceitos.

Não obtivemos os áudios do restante da discussão do item 4, nem dos itens 5 e 6. Portanto, passamos a descrever a questão 7 (Figura 3), cujo objetivo era introduzir a estratégia de aproximação da área da região sob a curva por meio de aproximações com o somatório das áreas de retângulos circunscritos à região.

Figura 3 - Enunciado da questão 7.

7) Uma possível estratégia para responder o item (6) é calcular a área de retângulos com bases iguais circunscritos na região *R* (veja imagem abaixo) e aproximar sua área pela soma das áreas desses retângulos. Complete a tabela abaixo, a qual sugere essa estratégia:



Δt	Quantidade de Retângulos	Área de cada Retângulo	Soma das Áreas dos Retângulos
[0,2]	1		
[0,2]	2		
[0,2]	4		
[0,2]	8		

Com base no preenchimento e análise da tabela anterior, comente sobre:

a) Quantos retângulos você poderia circunscrever na região *R*?

b) O que você observa acerca do valor da soma das áreas conforme você aumenta o número de retângulos circunscritos na região *R*?

c) O que ocorre com o tamanho da base dos retângulos circunscritos conforme você aumenta sua quantidade?

Fonte: Elaboração própria.

No início, a dupla mostrou certa dificuldade para entender o processo descrito no enunciado da tarefa, mas P2 supõe que as divisões propostas não possuem uma quantidade máxima, evocando noções de limite:

> *P2: Eu acho que a resposta da primeira seria infinitos, mesmo a gente não ter entendido o negócio ali. Porque tu pode… Subdividir em quantas vezes...*
> *P1 e P2: … tu quiser.*
> *P1: Uhum.*
> *P2: Porque daí então… A ideia de limite né?*
> *P1: Sim.*
> (Diálogo entre os participantes, 2019)

Os alunos chamam o monitor para esclarecer sua dúvida quanto ao enunciado e, na sequência, desenvolvem o cálculo da aproximação da área da região sob a curva por meio da soma das áreas dos retângulos circunscritos sem grandes dificuldades. Ao final do processo, os participantes percebem o sentido do que foi feito, ao responder os itens da questão:

> *P1: Sim. Infinitos. Agora eu consigo entender, é infinitos triângulos [retângulos].*
> *P2: Quantos… Tantos quantos quisermos, né?*
> *P1: É, quantos… quanto quisermos. Ou seja, infinitos.*
> *P2: A b, o que você observa acerca do valor das áreas conforme você aumenta o número de retângulos circunscritos na região R… A soma vai diminuindo.*
> *P1: Uhum, porque vai aproximando.*
> *P2: Sim, aproximando do valor real.*
> *P1: Isso. Então quanto… Eu acho que quanto mais retângulos a gente dividir...*
> *P2: Mais aproximado vai ficar da área...*
> *P1: Da área real.*
> *P2: É.*
> *P1: Vai ser uma aproximação melhor. Então será que é por isso que a gente tem que fazer Números Reais e Complexos pra Cálculo?*
> *P2: Porque é pré-requisito, né?*
> *P1: Sim.*
> *P2: É, deve ser.*
> *P1: Porque a gente aprende a… Que existe infinitas casas… Essa ideia. É, eu acho que é por isso que a gente aprende reais.*
> (Diálogo entre os participantes, 2019)

Neste excerto, observamos que a dupla evoca uma noção de limite que já foi trabalhada em uma disciplina anterior da graduação, e a utiliza para elaborar um raciocínio que descreve qualitativamente o processo de aproximar a área da região por meio da soma das áreas de retângulos circunscritos, o qual foi feito no início da questão 7 com representação algébrica. Temos, neste momento, mais um exemplo do processo de traduzir, em que a situação inicialmente formulada em representação numérica foi agora formulada em língua materna.

Há um outro processo do pensamento matemático avançado apontado por Dreyfus (2002) que percebemos nesta questão: a generalização. Segundo Dreyfus (2002, p.35, tradução nossa), “Generalizar é derivar ou induzir a partir de particulares, identificar semelhanças, expandir domínios de validade”. Neste sentido, a pergunta “Quantos retângulos você poderia circunscrever na região R?” tem um propósito de incentivar que o raciocínio desenvolvido para alguns casos particulares seja induzido. Intenção semelhante também pode ser observada nas questões 5 e 6 apresentadas no Quadro 3, as quais incentivam que o aluno procure refletir sobre a validade de sua estratégia para o cálculo da área sob as curvas da aceleração, da velocidade e da posição, para curvas quaisquer. Entendemos que essas questões exemplificam mais uma potencialidade da abordagem proposta.

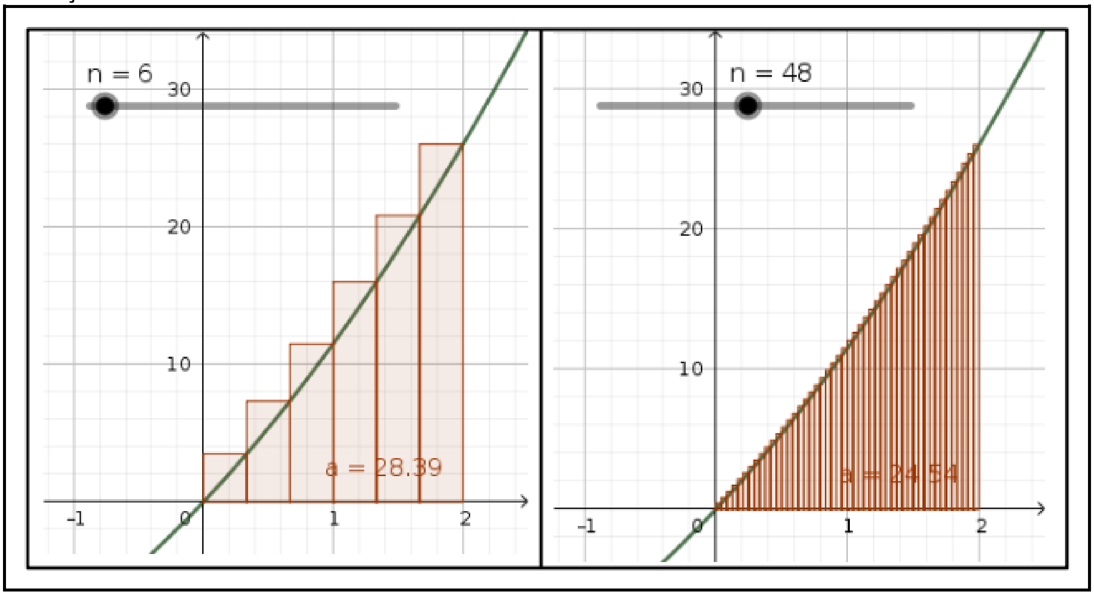
Dando sequência à tarefa, ao analisar o que acontece com as bases dos retângulos conforme seu número aumenta, a dupla busca uma relação entre a quantidade de retângulos e o tamanho da base dos mesmos, envolvendo uma razão:

> *P1: Elas vão se dividindo...*
> *P2: Numa proporção.*
> *P1: Numa proporção. Nesse caso aqui é… Na mesma proporção né? Porque todas sempre ficam iguais.*
> *P2: Pera aí que não ficou bem escrito. Mas tipo assim, tá, beleza, tu divide em 8 retângulos a base… o tamanho de cada base vai tá relacionado com isso, né?*
> *P1: Sim.*
> *P2: 1 vai ficar 1 oitavo. Aumenta o número de… Que tu acha? A base vai diminuir na mesma proporção em que aumenta o número de retângulos.*
> *P1: Isso. Porque elas não… são sempre bases do mesmo tamanho, né?*
> *P2: Sim, todas as...*
> *P1: Uhum, na proporção, então faz sentido isso que tu escreveu. É só a questão ter retângulo que eu já fico assim, eu odeio geometria.*
> *P2: Eu também não gosto.*
> (Diálogo entre os participantes, 2019)

No excerto acima, observamos que os estudantes se voltam novamente para uma representação algébrica da situação e, neste caso, “perdem” o aspecto mais qualitativo da questão. Finalmente, a tarefa 8 dava instruções para que fosse feita uma construção no software GeoGebra, representando a soma de Riemann superior no intervalo estudado com o número de retângulos definido por um controle deslizante, a fim de permitir uma representação visual do que ocorre conforme a quantidade de retângulos é aumentada, como mostrado na figura 4.

Também não dispomos dos áudios das discussões da dupla no desenvolvimento dessa tarefa. Apesar disso, gostaríamos de observar que esta questão agrega uma representação visual dinâmica à investigação proposta na questão 7 e, além disso, permite que os estudantes tenham acesso ao cálculo da soma das áreas de um número bastante alto de retângulos circunscritos à região R. Entendemos que este é um aspecto importante para que os estudantes possam acompanhar de forma mais precisa e “concreta” o processo de aproximação do valor da área da região.

Figura 4 - Visualização fornecida pelo software GeoGebra para a soma de Riemann superior seguindo-se as instruções da tarefa 7.



Fonte: Elaboração própria.

Estes aspectos estão diretamente relacionados às potencialidades do software GeoGebra e ao seu papel ativo nos processos de produção de conhecimento matemático (Borba; Villareal, 2005) que são fomentados de forma articulada à abordagem da Análise de Modelos. Nesse sentido, sugerimos esta questão como um exemplo da potencialidade da abordagem para o desenvolvimento dos processos de transitar, traduzir e generalizar. Uma análise de diálogos dos estudantes resolvendo esta questão poderá confirmar (ou não) essa hipótese.

5 Considerações finais

Neste artigo, analisamos a tarefa sobre integral definida proposta no ambiente de Análise de Modelos com o uso de Tecnologias Digitais que desenhamos para o ensino e a aprendizagem de CDI. Em particular, analisamos potencialidades dessa abordagem para o desenvolvimento de processos de pensamento avançado. A análise dos dados nos permitiu identificar potencialidades relacionadas aos processos de transitar entre representações mentais, traduzir e generalizar.

O trânsito entre diferentes representações foi incentivado pelo próprio enunciado das tarefas, mas, também, pela possibilidade de os estudantes trocarem ideias com base nas informações que obtinham a partir de sua interação com os softwares, os quais também apresentaram múltiplas representações da situação analisada. Nesse sentido, consideramos que a abordagem incentiva o estudante a trabalhar sistematicamente com o transitar entre suas representações mentais.

A potencialidade do ambiente para o processo de tradução deve-se, em parte, à própria proposta de partir de um fenômeno e de um de seus modelos matemáticos, conduzindo o debate acerca dos conceitos matemáticos de CDI sem perder de vista o contexto. Finalmente, também observamos potencialidades relacionadas ao processo de generalização, a partir de questões que tinham o objetivo de induzir um raciocínio feito anteriormente, com casos particulares.

Gostaríamos de observar que os dados analisados neste artigo não são provenientes de uma primeira edição do curso, tratando-se, portanto, de uma proposta aprimorada com base em experiências anteriores. Apesar de o contexto da pesquisa ser um curso de extensão, temos como objetivo que a proposta possa ser desenvolvida em turmas regulares da disciplina, assim como foi feito em sua primeira versão (Soares, 2012). A edição de 2019 mostrou-se bastante abrangente e promissora, tanto que a ela se seguiram mais quatro ofertas do curso (três delas na modalidade de Ensino Remoto Emergencial, no ano de 2020, tendo em vista a pandemia do vírus Sars-Cov-2) com mudanças mínimas em sua estrutura. Perante as potencialidades que identificamos, parece-nos que o ambiente de Análise de Modelos com uso de Tecnologias Digitais tem potencial para modificar e impactar as práticas de sala de aula das disciplinas de CDI.

Referências

BOGDAN, R. C.; BIKLEN, S. K. **Investigação qualitativa em educação**: uma introdução à teoria e aos métodos. Portugal: Porto Editora, 1994.

BORBA, M. C.; PENTEADO, M. G. **Informática na Educação Matemática**. 5. ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2016. 104 p.

BORBA, M...; VILLARREAL, M. E. **Humans-with-Media and the Reorganization of Mathematical Thinking**: information and communication technologies, modeling, experimentation and visualization. New York: Springer, 2005.

DOERR, H. M.; WOOD, T. Pesquisa-Projeto (design research): aprendendo a ensinar Matemática. In: BORBA, Marcelo C. (Org.). **Tendências internacionais em formação de professores de matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2006. p. 113-128.

DREYFUS, T. Advanced mathematical thinking processes. In: TALL, D. **Advanced mathematical thinking**. Dordrecht: Kluwer, 2002. p. 25-41.

EISENBERG, T. Functions and associated learning difficulties. In: TALL, D. **Advanced mathematical thinking**. Dordrecht: Kluwer, 2002. p. 25-41.

FRANCHI, R H. O. L. Cursos de Cálculo: uma proposta alternativa. **Temas & Debates**, Sociedade Brasileira de Educação Matemática, ano VIII, n. 6, 39-43, 1995.

JAVARONI, S. L. ; SOARES, D. S. Modelagem Matemática e Análise de Modelos Matemáticos na Educação Matemática. **Acta Scientiae** (ULBRA), v. 14, p. 260-275, 2012.

KAPUT, J. Teaching and learning a new algebra with understanding. In: FENNEMA, E. ROMBERG, T.A.(Orgs.), **Mathematics classrooms that promote understanding**. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum. 1999. Disponível em: <http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/DA/DA-TEXTOS/Kaput_99AlgUnd.pdf> Acesso em: 15 fev. 2021.

RASMUSSEN, C.; MARRONGELLE, K.; BORBA, M. C. Research on calculus: what do we know and where do we need to go? **ZDM** - The International Journal on Mathematics Education (Berlin. Print), v. 46, p. 507-515, 2014.

SOARES, D. S. **Uma Abordagem Pedagógica Baseada na Análise de Modelos para alunos de Biologia:** qual o papel do software? 2012. 341 folhas. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, SP, 2012.

SOARES, D. S. Model Analysis with Digital Technology: A “Hybrid Approach”. In: Gloria Ann Stillman; Werner Blum; Maria Salett Biembengut. (Org.). **Mathematical Modelling in Education Research and Practice:** Cultural, Social and Cognitive Influences (ICTMA 16). 1ed.New York: Springer, 2015, v.1, p. 453-463.

SOARES, D. S.; BORBA, M. C. The role of software Modellus in a teaching approach based on model analysis. **ZDM** - The International Journal on Mathematics Education (Berlin. Print), v. 46, p. 575-587, 2014.

SOARES, D. S.; VIER, G. Os Diálogos em um Ambiente de Análise de Modelos e Tecnologias: queda de um objeto com resistência do ar. **Educere et Educare**, v. 12, p. 1, 2017a.

SOARES, D. S.; VIER, G. Students’ dialogues in study of the Definite Integral based on analysis of a physical model with technology. In: 11a Delta Conference, 2017, Gramado. **Proceedings of 11a Delta Conference.** Lajeado, RS e Rio Claro, SP: Univates e Unesp, 2017b. p. 1-21.

TALL, D. Students Difficulties in Calculus. **Proceeding of Working Group 3 on Students’ Difficulties in Calculus**. ICME-7, Québec, Canada, p. 13-28, 1993.