

## Organização do ensino de Matemática à luz dos fundamentos teóricos do currículo catarinense

### Mathematics teaching organization in light of theoretical foundations by currículo catarinense

### Organización de enseñanza de las Matemáticas bajo la luz de los fundamentos teóricos del currículo catarinense

Josélia Euzébio da Rosa<sup>1</sup>

 [0000-0001-5738-8518]

Adriano da Silva Bem<sup>2</sup>

 [0000-0002-9917-4662]

#### Resumo

Investigamos as possibilidades de se repensar o modo de organização do ensino da gênese do conceito de multiplicação, no contexto da formação inicial de professores por meio de um experimento didático desenvolvimental. Tomamos a dialética como método de ensino e de pesquisa de natureza experimental a partir do seguinte problema: Quais elementos devem ser considerados no modo de organização do ensino do conceito teórico de multiplicação, por meio de uma situação desencadeadora de aprendizagem, à luz da Teoria Histórico-Cultural? A pesquisa foi fundamentada na Teoria Histórico-Cultural, na Teoria do Ensino Desenvolvimental de Davídov e na Atividade Orientadora de Ensino de Moura. Os dados de pesquisa consistem nas manifestações orais dos acadêmicos e de dois professores pesquisadores, gravadas via plataforma *Zoom*, durante uma aula da disciplina Fundamentos e Metodologias de Matemática para os anos iniciais do Ensino Fundamental, do curso de Pedagogia de uma universidade localizada no sul do Estado de Santa Catarina, Brasil. Durante a análise dos dados, revelamos as cenas que expressam o movimento de redução do concreto ao abstrato e ascensão do abstrato ao concreto percorrido pelos acadêmicos com base em Kopnin. No desenvolvimento do movimento conceitual percorrido pelos acadêmicos há indícios de desenvolvimento do pensamento teórico, uma vez que os estudantes tomaram como fio condutor das reflexões a essência, suas conexões internas no contexto de um sistema conceitual.

**Palavras-chave:** Teoria Histórico-Cultural. Educação Matemática. Conceito teórico de multiplicação.

#### Abstract

We investigated the possibilities of rethinking the way in which the teaching of the genesis of the multiplication concept is organized, in the context of initial teacher education through a developmental didactic experiment. We take dialectics as a teaching and research method of an experimental nature based on the following problem: Which elements should be considered in the teaching organization method of the theoretical concept of multiplication, through a situation that triggers learning, in the light of the Historical Theory -Cultural? The research was based on the Historical-Cultural Theory, Davídov's Theory of Developmental Teaching and Moura's Teaching Orientation Activity. The research data consist of the oral manifestations of the academics and of two

<sup>1</sup> [joselia.euzebio@yahoo.com.br](mailto:joselia.euzebio@yahoo.com.br), Doutora em Educação, Professora, Universidade do Sul de Santa Catarina (Unisul), Tubarão/Santa Catarina/Brasil.

<sup>2</sup> [agronomoadriano@hotmail.com](mailto:agronomoadriano@hotmail.com), Especialista, professor, Rede Estadual de Educação, Tubarão/Santa Catarina/Brasil.

research professors, recorded via the Zoom platform, during a class of the Fundamentals and Methodologies of Mathematics for the early years of Elementary School, of the Pedagogy course of a university located in the south of State of Santa Catarina, Brazil. During the analysis of the data, we reveal the scenes that express the movement of reducing the concrete to the abstract and the rise of the abstract to the concrete covered by the academics based on Kopnin. In the development of the conceptual movement covered by academics there are signs of development of theoretical thinking, since students took the essence, their internal connections in the context of a conceptual system, as the guiding thread of reflections.

**Keywords:** Historical-Cultural Theory. Mathematical Education. Theoretical concept of multiplication.

### Resumen

Investigamos las posibilidades de repensar la forma de organizar la enseñanza de la génesis del concepto de multiplicación, en el contexto de la formación inicial del profesorado a través de un experimento didáctico evolutivo. Tomamos la dialéctica como método de enseñanza e investigación de carácter experimental a partir del siguiente problema: ¿Qué elementos deben ser considerados en la forma de enseñar la enseñanza del concepto teórico de multiplicación, a través de una situación que desencadena el aprendizaje, a la luz de la Teoría Histórica? -¿Cultural? La investigación se basó en la Teoría Histórico-Cultural, la Teoría de la Enseñanza del Desarrollo de Davíдов y la Actividad de Orientación Docente de Moura. Los datos de la investigación consisten en las manifestaciones orales de los académicos y dos profesores investigadores, registradas a través de la plataforma Zoom, durante una clase de los Fundamentos y Metodologías de la Matemática para los años iniciales de la Escuela Primaria, del curso de Pedagogía de una universidad ubicada en el sur de Estado de Santa Catarina, Brasil. Durante el análisis de los datos, revelamos las escenas que expresan el movimiento de reducción de lo concreto a lo abstracto y el ascenso de lo abstracto a lo concreto cubierto por los académicos basados en Kopnin. En el desarrollo del movimiento conceptual cubierto por los académicos hay indicios de desarrollo del pensamiento teórico, ya que los estudiantes tomaron la esencia, sus conexiones internas en el contexto de un sistema conceptual, como hilo conductor de reflexiones.

**Palabras claves:** Teoría histórico-cultural. Educación Matemática. Concepto teórico de multiplicación.

### 1 Introdução

O presente artigo faz parte de um projeto coletivo mais amplo desenvolvido no contexto de um Grupo de Pesquisa<sup>3</sup> que tem como finalidade refletir sobre as limitações do modo de organização do ensino vigente no Brasil e suas possibilidades de superação a partir dos fundamentos e desdobramentos da Teoria Histórico-Cultural (Rosa; Nóbrega; Migueis, 2022). Na especificidade da disciplina de Matemática, por exemplo, atualmente predomina o desenvolvimento de um pensamento empírico em detrimento do pensamento teórico (Hobold, 2014).

No contexto do pensamento empírico, os conceitos matemáticos são abordados descontextualizados da própria Matemática, por meio de uma sequência linear, fragmentada, a partir da relação direta e superficial entre objetos e fenômenos com os símbolos e operações

<sup>3</sup> TedMat - Grupo de Pesquisa Teoria do Ensino Desenvolvidor (UNISUL). O referido grupo, juntamente com o GEPMAHC – Grupo de Pesquisa em Educação Matemática: uma abordagem Histórico-Cultural (UNESC) faz parte da Unidade Catarinense da rede nacional de grupos de pesquisa intitulada GEPAPe – Grupo de Estudos e Pesquisas sobre a Atividade Pedagógica (USP).

tomadas como uma sequência de procedimentos a serem realizados sem a compreensão do que gera tais procedimentos e com qual finalidade (Daviđov, 1982)<sup>4</sup>.

O pensamento teórico, por sua vez, vai além da aparência dessa sequência de procedimentos e adentra na essência, por meio de respostas às seguintes perguntas: Qual a gênese? Qual o percurso de desenvolvimento até atingir seu estágio atual? Por quê? Para quê? A serviço de quem esse conhecimento pode ser colocado? A partir destes e outros questionamentos, um grupo de pesquisadores liderados por D. B. Elkonin e V. V. Daviđov criou a Teoria do Ensino Desenvolvimental com base na Lógica Dialética, Teoria Histórico-Cultural e Teoria da Atividade.

Também neste contexto teórico, o professor Manoel Oriosvaldo de Moura, da Universidade do Estado de São Paulo (USP), propôs a Atividade Orientadora de Ensino.

A Atividade Orientadora de Ensino constitui-se um modo geral de organização do ensino, em que seu conteúdo principal é o conhecimento teórico e seu objeto é a constituição do pensamento teórico do indivíduo no movimento de apropriação do conhecimento. Assim, o professor, ao organizar ações que objetivam o ensinar, também requalifica seus conhecimentos [...] (Moura *et al.*, 2016, p. 115).

Como proposta teórico-metodológica, a Atividade Orientadora de Ensino deve conter em sua estrutura a síntese histórica do conceito, os recursos didáticos, a análise e a síntese coletiva durante a realização de situações desencadeadoras de aprendizagem (Moura, 1996).

A situação desencadeadora de aprendizagem consiste em uma proposta organizada pelo professor que, a partir de seus objetivos de ensino, conduz o movimento conceitual a ser apropriado pelos estudantes por meio de um problema de aprendizagem (Moura *et al.*, 2016).

A Secretaria Estadual de Educação de Santa Catarina, Brasil, desde 1991 adota em seus documentos curriculares o arcabouço teórico anteriormente apresentado. Porém, de modo geral, no ensino comumente desenvolvido nas escolas catarinenses, assim como no restante do país, prevalece os fundamentos da lógica formal tradicional, objetivados nos conceitos espontâneos e no pensamento empírico (Hobold, 2014). O teor empírico perpetua no Ensino Superior, inclusive nos cursos de formação de professores (Fontes, 2019). Conforme alerta o Currículo Catarinense,

O acesso à educação escolar não é garantia de desenvolvimento do pensamento teórico, visto que, dependendo da lógica que fundamenta o conteúdo e os métodos de ensino desenvolvidos em sala de aula, pode-se obter como resultado o pensamento empírico (Santa Catarina, 2019, p. 126).

O pensamento empírico não condiz com o estágio atual de desenvolvimento da ciência contemporânea.

[...] a tarefa da escola contemporânea não consiste em dar às crianças uma soma de fatos conhecidos, mas em ensiná-las a orientar-se independentemente na informação científica e em qualquer outra. Isto significa que a escola deve ensinar os alunos a pensar, quer dizer, desenvolver ativamente neles os fundamentos do pensamento

<sup>4</sup> As traduções das obras de Daviđov da língua espanhola para a língua portuguesa são de nossa responsabilidade.

contemporâneo para o qual é necessário organizar um ensino que impulse o desenvolvimento (Daviđov, 1988, p. 3).

Ao assumir como nossa, a tarefa da escola contemporânea proposta por Daviđov (1988), e conduzidos pelos pressupostos teóricos supracitados, surgiram alguns questionamentos: Como tornar realidade no ensino os fundamentos teóricos estudados? Como concretizar tais fundamentos? Enfim, pretendia-se saber como fazer, como colocar a teoria em prática. Era realmente a palavra **como**, que perseguia, por isso foi incorporada ao problema de pesquisa: Como organizar o ensino de Matemática com potencialidades para promover a aprendizagem de conceitos científicos e o desenvolvimento do pensamento teórico?

Ressalta-se que a palavra **como**, é aqui concebida de acordo com os fundamentos teóricos anunciados. Desse modo, a resposta teórica ao problema anunciado requer um modo geral de organização do ensino objetivado em uma experiência particular. E não uma sequência de procedimentos, tal como procede o pensamento empírico.

As pesquisas ocorrem nos diversos níveis de escolarização, desde a Educação Básica até o Ensino Superior. Mas, no presente artigo se apresentará os resultados de uma investigação que se realizou na formação inicial de professores, no contexto do Curso de Pedagogia de uma universidade localizada no sul do Estado de Santa Catarina, Brasil.

Portanto, no processo de busca por respostas ao problema de pesquisa coletivo, no contexto da formação inicial de professores, tomou-se como fio condutor o seguinte objetivo geral: investigar o desenvolvimento do pensamento matemático, em nível teórico, por estudantes do curso de Pedagogia.

Em consonância com os fundamentos da Teoria Histórico-Cultural, o método que sustenta as ações de pesquisa, ensino e extensão é o materialista histórico-dialético. Este método, ao seguir a lógica dialética, incorpora e supera a lógica formal. Uma das principais características deste método consiste na premissa de que o fenômeno investigado deve ser considerado em sua totalidade, na indissociabilidade entre teoria e prática.

A metodologia de pesquisa adotada será o experimento didático desenvolvimental. Tal metodologia está atrelada à compreensão de que é pelo ensino que se aprende e ao aprender se desenvolve. Porém, não se trata de qualquer ensino, mas de um ensino organizado com base nos conteúdos e métodos que possibilitem a promoção do desenvolvimento do pensamento teórico nos estudantes (crianças, adolescentes, jovens, idosos e adultos), a partir da apropriação de conhecimentos científicos.

Essa metodologia de pesquisa proposta por Daviđov (1988) permite ao pesquisador investigar o desenvolvimento dos seres humanos no processo de ensino e aprendizagem. Ainda de acordo com Daviđov (1988), o experimento didático desenvolvimental caracteriza-se pela intervenção ativa do pesquisador nos processos que ele investiga. Assim, se difere essencialmente do experimento de constatação, que destaca só o estado já formado e presente nos estudantes.

Essa proposta de “investigação aparece como metodologia de educação e ensino experimentais que impulsionam o desenvolvimento” (Daviđov, 1988, p. 196, tradução nossa). A realização do experimento didático desenvolvimental pressupõe a projeção e modelação da relação essencial dos conceitos no processo de aprendizagem. Durante a investigação, no contexto do processo de aprendizagem, se estuda também o movimento de origem e

desenvolvimento de novos conceitos e sistemas conceituais, conforme será apresentado na sequência.

## 2 Projeto coletivo: contexto experimental

Realizamos, ao longo do semestre 2020/2, um experimento didático desenvolvimental<sup>5</sup> com trinta e quatro acadêmicos do quarto e sexto semestre, matriculados na Unidade de Aprendizagem Fundamentos e Metodologias de Matemática para os Anos Iniciais do Ensino Fundamental (disciplina).

Trata-se de uma turma bem diversificada do ponto de vista da idade, com estudantes desde 18 até 48 anos. No início do semestre, a maioria da turma já estava em início da carreira docente, por meio de estágios remunerados e professor auxiliar de estudante com necessidades especiais. Muitos dos acadêmicos relataram que passaram por dificuldades ao aprender Matemática na Educação Básica, que se transformou ao longo dos anos, em aversão a essa ciência. Tal aversão provocou ansiedade e preocupação com o início da Unidade de Aprendizagem de Matemática no Curso de Pedagogia. Ao longo do semestre as inseguranças provocadas pelas experiências negativas anteriormente vivenciadas, foram gradual e parcialmente arrefecidas.

As aulas foram realizadas nas terças-feiras, das 19h15min até as 22h30min, via plataforma *Zoom*, em função da Pandemia causada pelo vírus SARS-CoV-2. Além dos trinta e quatro acadêmicos, também participaram do experimento quinze pesquisadores do TedMat, na condição de docente/pesquisador. As aulas eram gravadas no próprio aplicativo e disponibilizadas pela professora titular para os estudantes e pesquisadores. Ao todo foram quinze encontros, em cada encontro um pesquisador ou dupla assumiu a docência compartilhada com a professora titular da Unidade de Aprendizagem.

Durante a solução de cada situação desencadeadora de aprendizagem (Tarefa de Estudo)<sup>6</sup>, foram desenvolvidas as quatro ações de estudo propostas por Davídov (1982). Durante a realização de cada ação, os estudantes eram instigados a propor questões, formular diferentes hipóteses de solução e confirmar ou refutar tais hipóteses, conforme segue:

### 2.1 Primeira ação de estudo: revelação dos dados que compõem a relação essencial do sistema conceitual a partir do estudo com as grandezas

A primeira ação de estudo consiste na transformação dos dados da tarefa, com a finalidade de revelar a relação essencial do objeto estudado a partir da relação entre grandezas discretas e contínuas. A transformação dos dados da tarefa de estudo [da situação desencadeadora de aprendizagem] tem como finalidade revelar a relação essencial do conceito teórico, portanto, no âmbito de seu sistema conceitual.

Em outras palavras, em consonância com a lógica dialética, nesta primeira ação se experimenta o aspecto real da relação essencial que atuará como base genética, como fonte do conceito teórico, portanto, do seu sistema conceitual. “A ação de estudo examinada, em cuja base se encontra a análise mental, tem ao começo a forma de transformação dos dados objetivos da tarefa de estudo (esta ação mental se realiza, ao começo, em forma objet-

<sup>5</sup> O termo desenvolvimental está relacionado ao desenvolvimento do pensamento teórico como superação, por incorporação, do pensamento empírico.

<sup>6</sup> Concebemos uma Situação Desencadeadora de Aprendizagem como Tarefa de Estudo quando contempla, durante o processo de solução, as ações de estudo de Davídov (1998).

sensorial)” (Davióov, 1988, p. 182).

Porém, ainda na primeira ação de estudo, segundo Davióov (1982, p. 157), deve-se revelar a “essência abstrata da matemática” para que os estudantes possam fazer abstrações e “aproveitar sua força teórica” nas ações seguintes.

## **2.2 Segunda ação de estudo: modelação da relação entre os elementos que compõem a essência do sistema conceitual nas formas objetal, gráfica e literal (algébrica)**

A segunda ação de estudo consiste na modelação da relação essencial nas formas objetal, gráfica e literal. Os elementos revelados na primeira ação são modelados na segunda. Davióov (1988, p. 182) destaca “que os modelos de estudo constituem uma conexão internamente imprescindível no processo de compreensão dos conhecimentos teóricos e dos procedimentos generalizados de ação”. Porém alerta que nem toda representação consiste em um modelo de estudo. Somente aquela representação que reflete a relação essencial do conceito em estudo no contexto de seu sistema conceitual.

No modelo de estudo se representa a relação essencial, encontrada e abstraída no processo de transformação dos dados da tarefa, o conteúdo deste modelo fixa as características internas do objeto, não observáveis de maneira direta. O modelo de estudo, como produto da análise mental, pode ser depois um meio especial da atividade mental do homem (Davióov, 1988, p. 183).

A partir do modelo, em forma universal, é possível transformá-lo, conforme ocorre na terceira ação de estudo.

## **2.3 Terceira ação de estudo: transformação do modelo da relação essencial para o estudo de suas propriedades**

Na terceira ação de estudo o trabalho com o “modelo aparece como o processo pelo qual se estudam as propriedades da abstração substancial da relação essencial” (Davióov, 1988, p. 183). Ao transformar o modelo os estudantes revelam o sistema conceitual no qual está inserido o conceito em estudo.

A orientação dos estudantes para a interconexão da relação interna geradora de outros modelos a partir do modelo revelado na primeira ação, “serve de base para formar neles certo procedimento geral destinado a resolver a tarefa de estudo e assim formar o conceito sobre a “célula” inicial deste objeto” (Davióov, 1988, p. 183). O núcleo da célula inicial consiste naquela conexão interna que possibilita deduzir outros modelos a partir da modelação realizada na segunda ação de estudo. Portanto, a célula inicial é composta por todos os modelos que podem ser deduzidos a partir da relação essencial.

Na primeira ação de estudo o ponto de partida é o concreto real (relação entre grandezas). Pelo movimento de redução do concreto ao abstrato, por meio de sucessivas abstrações, atinge-se, na segunda ação de estudo, o modelo do procedimento geral, na sua forma universal, na forma algébrica. Na terceira ação de estudo inicia-se o procedimento de ascensão do abstrato ao concreto. Porém, o procedimento de concretização é concluído na quarta ação de estudo.

## **2.4 Quarta ação de estudo: construção de um sistema de tarefas particulares que podem ser resolvidas pelo procedimento geral revelado na primeira ação, modelado na segunda e transformado na terceira**

Na quarta ação de estudo se concretiza o procedimento geral, tanto para revelar a relação de multiplicidade e divisibilidade, quanto para a resolução de tarefas particulares. Ocorre, portanto, a elaboração e resolução de novas tarefas particulares, inclusive a resposta ao problema desencadeador.

Graças a esta ação os escolares concretizam a tarefa de estudo inicial e a convertem na diversidade de tarefas particulares que podem ser resolvidas por um procedimento único (geral), compreendido durante a realização das anteriores ações de estudo. O caráter eficaz deste procedimento se verifica, justamente, na solução de tarefas particulares; os estudantes as enfocam como variantes da tarefa de estudo inicial e imediatamente, como se fosse “de golpe” separam em cada uma a relação geral, orientando-se pela qual podem aplicar o procedimento geral de solução apropriado (Dávidov, 1988, p. 183).

As ações anteriormente apresentadas, quando devidamente organizadas pelo professor, conduzem o pensamento dos estudantes no movimento orientado do geral ao particular, por meio do procedimento de redução do concreto ao abstrato e ascensão do abstrato ao concreto. Neste, se reconstitui o movimento lógico-histórico não só da origem, mas também, do desenvolvimento dos conceitos e seus respectivos sistemas conceituais até atingir o estágio contemporâneo.

O fio condutor consiste no movimento de redução do concreto ao abstrato e ascensão do abstrato ao concreto em torno da essência do conceito, no contexto de seu sistema conceitual. Não se trata de uma sequência engessada de passos a serem seguidos. Mas de um modo geral de organização do ensino para orientar de onde se deveria partir, por onde se deveria percorrer e aonde se deveria chegar. Não se trata de um movimento linear, mas dialético, marcado por avanços e retrocessos e que poderia sofrer alterações. Por exemplo, em algumas situações desencadeadoras de aprendizagem tomou-se um problema para desencadear a realização de cada ação. Portanto, quatro problemas desencadeadores no contexto de uma única situação desencadeadora de aprendizagem.

### **3 Da totalidade à unidade de análise e o isolado da pesquisa**

Organizamos o experimento didático desenvolvimental por meio de situações desencadeadoras de aprendizagem e estudo prévio de um texto que subsidiasse as reflexões que seriam realizadas em aula. Os conceitos matemáticos não foram abordados separadamente, mas em seus respectivos sistemas conceituais. Não separamos um momento ou parte das aulas para falar sobre os fundamentos teóricos, como ocorre no ensino tradicional. As reflexões sobre os fundamentos teóricos, estudados previamente pelos estudantes, emergiam durante as aulas, a partir da objetivação destes no modo de organização do ensino em desenvolvimento. Além de desenvolverem situações desencadeadoras de aprendizagem, os acadêmicos também elaboraram as suas próprias. Pois entendemos que passa pela formação de professores não só a solução dos problemas já existentes, mas também, a proposição de novos problemas desencadeadores de aprendizagem.

Diante da impossibilidade de abarcar todo o experimento didático desenvolvimental nos limites de um artigo, elegemos uma unidade de análise que consiste na essência dessa

totalidade: o desenvolvimento do pensamento matemático, em nível teórico, por acadêmicos do Curso de Pedagogia.

Durante o semestre as situações desencadeadoras de aprendizagem foram desenvolvidas a partir do estudo de grandezas discretas e contínuas tais como: comprimento, valor monetário, área, capacidade, volume, tempo e ângulo.

A título de exemplificação, no presente artigo será apresentada a situação desencadeadora desenvolvida a partir da grandeza capacidade durante uma aula com início às 19h15min e término às 22h30min. Trata-se de um isolado (Caraça, 1951), que reflete o movimento das relações fundamentais da unidade de análise.

O isolado referente ao desenvolvimento do pensamento matemático, em nível teórico, mediado pelo sistema conceitual de multiplicação, a partir da grandeza capacidade, é composto por quatro episódios. Cada episódio corresponde a uma ação de estudo.

Os episódios “podem revelar interdependência entre os elementos de uma ação formadora” (Moura, *apud*, Silva, 2018, p. 148). Os episódios são compostos por cenas que retratam o movimento do fenômeno e as mudanças na forma de pensamento. De acordo com Moura (2004, *apud*, Silva, 2018, p. 148), as cenas são “situações nas quais podem ser ressaltadas as regularidades do movimento do fenômeno analisado”. Cada cena será constituída por flashes, tal como sugere Silva (2018).

A fonte de dados consiste na transcrição, na íntegra, das manifestações dos (as) acadêmicos (as), da professora titular e do professor/pesquisador a partir da gravação do Zoom. Todos os acadêmicos aceitaram participar da pesquisa. A fim de preservar a identidade dos mesmos, utilizaremos a letra A, de acadêmico, seguida de um número para referenciá-los. Quando a fala foi do(a) Professor(a) Pesquisador(a) é representada por PP.

#### 4 Situação desencadeadora de aprendizagem

A título de exemplificação do processo desenvolvido ao longo do semestre, apresentamos a seguir uma situação desencadeadora de aprendizagem sobre o sistema conceitual de multiplicação intitulada **João, o construtor** que elaboramos e desenvolvemos com os(as) acadêmicos(as) do Curso de Pedagogia.

Quadro 1 – Situação desencadeadora de aprendizagem

<b>João, o construtor</b>
<p>João iniciou o trabalho com a construção de residências populares em uma região com escassez de água. Ele é um profissional muito dedicado e desde que começou a trabalhar na construção civil, sempre se esforçou para otimizar os recursos naturais. A preocupação com a sustentabilidade sempre esteve presente em suas ações.</p> <p>Com o objetivo de promover o aproveitamento de água da chuva, João decidiu construir em cada casa uma cisterna (reservatório para armazenar a água da chuva). Enquanto estava projetando as casas lhe surgiram umas dúvidas em relação ao tamanho das cisternas. Pensou: Faço todas de tamanhos iguais? Ou de tamanhos diferentes? Tenho que evitar o desperdício do material a ser utilizado na construção das cisternas, mas como vou saber o tamanho mais adequado para cada residência?</p> <p>E agora, como João poderá resolver esse problema? Como podemos auxiliá-lo no dimensionamento de cisternas para as residências que João irá construir?</p>

Fonte: Elaboração dos autores, 2020.

É importante destacar que os valores não estão dados na situação desencadeadora, como comumente se faz no ensino tradicionalmente desenvolvido no Brasil, trata-se de uma situação particular, escrita na forma geral, portanto, válida para qualquer valor.

Após a leitura da situação desencadeadora de aprendizagem **João, o construtor**, iniciamos as reflexões sobre o processo de solução do problema desencadeador: E agora, como João poderá resolver esse problema? Como podemos auxiliá-lo no dimensionamento de cisternas para as residências que João irá construir?

#### 4.1 Episódio formativo 1: primeira ação de estudo

A primeira ação de estudo é considerada por Davídov (1988) como a principal, pois prepara o caminho para o desenvolvimento com êxito das ações seguintes. Nesta, revela-se a relação essencial do sistema conceitual em estudo a partir do concreto sensorial. Como as aulas foram realizadas durante o período pandêmico, o concreto sensorial (visualmente perceptível) foi exposto por meio de slides compartilhados em tela, via *Zoom*. Os sentidos nos põem “em contato com o mundo exterior. Todo o nosso conhecimento provém, em suma, das sensações e percepções” não possuímos “outras fontes, outros canais de contato com o mundo exterior” (Kopnin, 1978, p. 151).

Mas em que consiste a relação essencial? O que ela representa? De onde ela emerge? A gênese da essência advém da relação entre as medidas da grandeza envolvida na situação desencadeadora de aprendizagem. Portanto, durante a primeira ação de estudo faz-se necessário revelar qual ou quais grandezas irão sustentar o processo de abstração e generalização do sistema conceitual a ser desenvolvido, conforme explicitamos na Cena 1.

##### 4.1.1 Cena 1 – Identificação da grandeza que deu origem à necessidade que gerou o problema desencadeador

Iniciamos por meio da reflexão sobre alguns aspectos importantes para a resolução do problema vivenciado por João. Embora a grandeza envolvida seja a capacidade, a grandeza volume está diretamente relacionada com a capacidade da cisterna para armazenar uma determinada quantidade de água. Com o objetivo de avaliar se os estudantes compreendiam tal relação, questionamos:

*PP: O que vocês entendem por capacidade?*

*A10: É uma grandeza.*

*PP: E o que é capacidade enquanto grandeza?*

*A12: Quando fala em capacidade, eu imagino a questão do litro, sabe, quanto de volume cabe dentro de determinado recipiente, pode ser medido em litro, mililitro.*

*A1: O volume daquele objeto, né, o quanto ele pode [foi interrompido por A6]*

*A6: Isso mesmo A12, a capacidade é o volume interno de um recipiente, [...], como nós estamos debatendo da cisterna né, creio que seja isso.*

(Diálogo entre os professores pesquisadores (PP) e os acadêmicos, 2020).

Durante a reflexão inicial, os estudantes trouxeram à tona a relação entre as grandezas capacidade e volume. A fala de A6 abriu o caminho para que avançássemos a partir da necessidade de se determinar o tamanho da capacidade e/ou do volume, sua medida. De acordo com Caraça (1951, p. 29), medir consiste em “comparar duas grandezas da mesma espécie”. Podemos afirmar que volume e capacidade são duas grandezas da mesma espécie?

No presente artigo, consideramos capacidade como o volume de água que cabe na cisterna, portanto, da mesma espécie, embora com significados distintos. A partir desta compreensão, aprofundamos no diálogo sobre grandezas (Cena 2).

#### 4.1.2 Cena 2 – Revelação da relação essencial

Após identificarmos a partir de qual grandeza surgiu o problema do personagem principal (Cena 1) e em que consiste tal grandeza, passamos a refletir sobre qual necessidade deu origem a esse problema: medição da capacidade da cisterna, conforme o diálogo a seguir:

*PP: O que precisamos saber para calcular o tamanho (capacidade) do reservatório?*

*A6: A quantidade de pessoas da casa.*

*A13: Eu acho que a quantidade de pessoas é mais importante que o tamanho da casa [...].*

*A3: Então é só multiplicar, né, pelo tanto de pessoas.*

*A15: Eu acredito que para gente saber a capacidade do reservatório, teria que pegar a quantidade de pessoas, como a gente já conversou, mais ou menos uma média de quantos litros por dia as pessoas iriam gastar, multiplicar no caso, e ver também a quantidade de tempo, porque se tu fores usar uma semana uma quantidade de água, pode ser até um tamanho menor, se for para um mês, tem que ser um reservatório maior.*

(Diálogo entre os professores pesquisadores (PP) e os acadêmicos, 2020).

As falas anteriores (5 flashes), evidenciam a complexidade na qual se insere o problema vivenciado por João, tais como o tempo de utilização da água armazenada, o tempo de recorrência de precipitação, as dimensões do telhado da casa, entre outros, no contexto mais amplo da importância de se pensar alternativas sustentáveis que promovam a conservação dos recursos naturais.

Diante da complexidade do fenômeno, enquanto concreto real, faz-se necessário identificar o núcleo comum presente nas diferentes relações entre número de pessoas, quantidade de água, quantidade de tempo e tamanho do reservatório. Qual a relação interna, qual relação que unifica, qual relação que gera interdependência entre estes diferentes aspectos? O caráter interno que estabelece a conexão entre os diferentes aspectos do problema vivenciado por João consiste na relação de multiplicidade entre as grandezas envolvidas. As “ligações universais da realidade, abre perante ao ser humano” as possibilidades de desenvolvimento do pensamento teórico (Dávidov, 1988, p. 132).

Mas quais elementos possibilitam as ligações universais do problema vivenciado por João? Em outras palavras, quais os elementos que constituem a essência? Iniciamos o processo de revelação dos elementos que compõem a relação essencial na cena 3.

#### 4.1.3 Cena 3 – Revelação do primeiro elemento que constitui a relação essencial

A partir da tomada de consciência, por parte dos acadêmicos, da complexidade do problema em pauta, demos mais um passo em direção à sua delimitação. Assim como nas duas cenas anteriores, realizamos perguntas para orientar e oferecer os instrumentos necessários à formação do pensamento teórico dos acadêmicos. Expomos no slide (Ilustração 1, Cena 4) um recipiente de medida  $t$ , uma unidade com medida  $x$ , e questionamos:

*PP: Quantas unidades com medida  $x$  cabem na cisterna com medida  $t$ ?*

*A18: A gente pode colocar de um em um, aquele cubinho azul dentro da cisterna*

(Diálogo entre os professores pesquisadores (PP) e os acadêmicos, 2020).

Desse modo, a primeira hipótese de solução consiste na contagem um a um, tal como propõe A18, foi uma importante etapa durante o desenvolvimento histórico do conceito de número e, por extensão, do conceito de multiplicação. É a partir da contagem um a um que surgiu historicamente a necessidade da contagem por agrupamento. Devido a importância desse momento do movimento lógico-histórico para a introdução do conceito de multiplicação, acatamos a sugestão, conforme a cena 4:

#### 4.1.4 Cena 4 – Revelação do segundo elemento que constitui a relação essencial

A contagem um a um foi realizada por meio da operação da adição, do acréscimo de mais uma unidade. Durante a contagem, cada unidade era registrada na reta numérica exposta no slide. Quando estávamos na quinta unidade, supomos a existência de uma unidade de medida intermediária ( $i$ ):

*PP: Supomos que  $i = 6x$ . Quanto falta para completar  $i$ ?*

*A14: Um  $x$ .*

*PP:  $i$  é igual a cinco  $x$  mais quanto?*

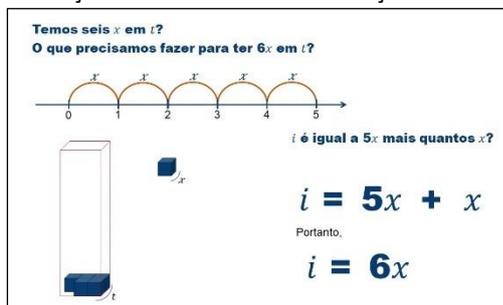
*A23: mais um  $x$ .*

*A14:  $5x + 1x$ .*

(Diálogo entre os professores pesquisadores (PP) e os acadêmicos, 2020).

A introdução da unidade de medida intermediária, que vai possibilitar a contagem de seis em seis na próxima cena, foi revelada a partir da transformação dos dados da tarefa. Agora temos uma nova unidade de medida, uma medida intermediária, composta por seis unidades básicas cada. Com base na perspectiva teórica por nós assumida, tal como propõe o currículo catarinense (Santa Catarina, 2019), os conceitos matemáticos são abordados na indissociabilidade entre as significações aritméticas, algébricas e geométricas no contexto de seus sistemas conceituais. O sistema conceitual contemplado nas cenas 3 e 4 foi objetivado, durante o diálogo de estudo, no seguinte slide (Ilustração 1):

Ilustração 1 – Contexto de introdução da unidade de medida intermediária



Fonte: Elaboração dos autores, 2020.

De acordo com Costa (1866, p. 9), “medir uma grandeza é determinar quantas vezes ela contém a grandeza da sua espécie, que serve de unidade de medida”. Portanto, a medição expressa na ilustração 1, consiste em determinar quantas vezes a unidade com medida  $x$  cabe no recipiente cuja medida da capacidade é  $t$ . O resultado será um valor aritmético. Por consequência da medição, “os números são expressões de medida das grandezas” (COSTA, 1866, p. 9). Essa é a gênese teórica do conceito de número. O conceito teórico de

multiplicação, enquanto operacionalização do conceito de número, requer, igualmente, uma abordagem teórica do conceito de número. Além disso, a relação de multiplicidade é que dá origem ao conceito de número e não o contrário.

Até a cena 4 revelamos dois, dos três elementos que compõem a relação essencial do conceito de multiplicação: o todo (total de unidades básicas a ser calculado, ou seja, o resultado que ainda é desconhecido) e a unidade de medida intermediária. O terceiro elemento será revelado na próxima cena.

#### 4.1.5 Cena 5 – Revelação do terceiro elemento que constitui a relação essencial

A unidade intermediária consiste em um elemento essencial por determinar dois fatores componentes da operação multiplicação: multiplicando e multiplicador. Ou seja, em termos aritméticos é dela que surge a quantidade de vezes que uma determinada quantidade de unidade está sendo multiplicada. Nessa direção, após as reflexões sobre quantos  $x$  cabem em  $i$ , retomamos a pergunta inicial:

*PP: Quantos  $x$  cabem em  $t$ ?*

*A12: Ainda não sabemos.*

*A3: Até agora foram seis.*

*A14: Quantas vezes  $i$  cabe dentro de  $t$ , a gente pode fazer agora.*

*A11: A gente pode multiplicar.*

*A23: Eu acho que ali na reta dá para pular para doze.*

*A10: Será que não ficaria mais rápido colocando de seis em seis?*

*A17: Tá, olha só, eu não entendi muito bem essa medida intermediária [...].*

*A14: A unidade de medida intermediária pode ser qualquer uma [qualquer valor].*

*A1: Ai tem que ser agrupamentos, né, da primeira unidade.*

(Diálogo entre os professores pesquisadores (PP) e os acadêmicos, 2020).

A fala de A14 revela o terceiro elemento da relação essencial: “Quantas vezes  $i$  cabe dentro de  $t$ ”. Em outras palavras, quantas vezes a unidade de medida intermediária se repete na grandeza em medição. Assim, concluímos a revelação e transformação dos dados da relação essencial. A unidade de medida considerada passa a ser outra, de básica para intermediária (Fontes, 2019). Ao revelar o terceiro elemento da relação essencial, concluímos a primeira ação de estudo.

Os três elementos que constituem a relação essencial foram revelados a partir da prática de medição sensorialmente representada por meio do slide. Porém, por meio das significações geométricas (corpos geométricos e reta), aritméticas (números naturais) e algébricas (letras para representar os valores das medidas) dirigimos a atenção dos acadêmicos para além da execução prática da medição, representada por meio do movimento dos slides, e adentramos em sua essência. Por meio da interconexão dessas três significações revelamos a conexão da unidade básica com a intermediária e da intermediária com o todo em medição.

Ao longo do desenvolvimento da primeira ação de estudo, separamos a relação comum a todas as situações que envolvem a solução do problema vivenciado por João, revelamos os elementos que compõem essa relação e como eles estão vinculados. Agora se faz necessário dar continuidade ao processo de abstração por meio da representação da relação essencial nas formas gráfica e literal, a partir do experimento objetual, na segunda ação de estudo.

## 4.2 Episódio formativo 2: segunda ação de estudo

Na primeira ação de estudo iniciamos pelo concreto real sensorial, devidamente selecionado e organizado para possibilitar a revelação dos nexos, do elo interno, da conexão entre os elementos que constituem a relação essencial. De acordo com Kopnin (1978, p. 284), “o conhecimento empírico se baseia apenas experiência sensorial”. Por isso, reflete as propriedades externas dos objetos e apoia-se nas representações concretas. “Por si mesma a observação empírica nunca pode revelar e demonstrar a necessidade e a universalidade das relações observáveis” (Kopnin, 1978, p. 291). O universal determina a essência e as particularidades.

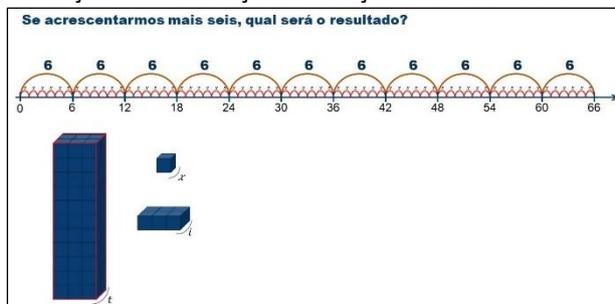
No conhecimento teórico as representações concretas também são consideradas como ponto de partida, mas vai além das propriedades externas. De acordo com Kopnin (1978, p. 263) “o pensamento teórico resulta à base do conhecimento experimental”, resulta da revelação das relações entre as propriedades externas e suas conexões internas. Kopnin (1978, p. 165) elucida que “o conhecimento é verdadeiro somente quando incorpora conteúdo objetivo”. Para o autor em referência, “a fonte objetiva da formação e desenvolvimento dos conceitos é o mundo real, sendo a base material constituída pela prática histórico-social dos homens. É justamente do mundo objetivo que todos os conceitos extraem seu conteúdo” (Kopnin, 1978, p. 207-208).

Neste sentido, a reta numérica incorpora a relação essencial revelada no mundo objetivo. É uma abstração primária, uma representação particular de um experimento singular de medição, conforme ocorre na cena 6:

### 4.2.1 Cena 6 – Modelação da relação essencial nas formas objetal (singular) e gráfica (particular)

Na primeira ação de estudo a medição estava sendo realizada por meio da unidade básica ( $x$ ). Agora, para agilizar esse processo, decidimos adotar a unidade de medida intermediária ( $i$ ). Desse modo, em vez de acrescentar de unidade em unidade, passamos a acrescentar de seis em seis unidades, por meio de um movimento sincronizado. A cada seis unidades acrescentadas no recipiente registrávamos seis unidades na reta numérica (Ilustração 2).

Ilustração 2 – Modelação da relação essencial nas formas objetal (singular) e gráfica (particular)



Fonte: Elaboração dos autores, 2020.

Após combinarmos com a turma que faríamos a medição a partir da unidade de medida intermediária, deixamos o recipiente com medida  $t$  vazio e reiniciamos o registro na reta numérica, com o número zero. Colocamos seis unidades no recipiente e registramos estas

seis unidades na reta numérica. Esse mesmo procedimento se repetiu até completar o recipiente com medida **t**, de seis em seis unidades:  $6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6$ .

A sequência revelada durante a medição configura a tabuada do número seis ( $6 \times 1 = 6$ ,  $6 \times 2 = 12$ , ...). O produto do termo seguinte é composto pelo produto da operação anterior mais uma unidade de medida intermediária. Trata-se da lei de recorrência, pois para determinar o próximo produto da sequência é necessário recorrer ao anterior. A lei de recorrência permite que os próximos elementos da sequência sejam conhecidos.

Mas, com base na lei de recorrência realizaríamos uma generalização teórica? Não. Pois a generalização a partir da ideia de que basta acrescentar seis unidades ao resultado anterior foi elaborada a partir da observação direta do procedimento de medição. Trata-se, portanto, de uma generalização empírica bastante limitada, pois como faríamos se a unidade de medida intermediária se repetisse por mil vezes, por exemplo?

Para que ocorra uma generalização teórica faz-se necessária adentrar nas conexões internas. E a reta numérica será um importante elemento mediador entre o singular e o universal (modelação literal), conforme procederemos na cena 7.

#### 4.2.2 Cena 7 – Modelação da relação essencial na forma literal, universal

Na cena seis, procedemos a modelação da relação essencial nas formas objetal (experimento de medição da grandeza capacidade) e gráfica (reta numérica). Se parássemos por aqui, teríamos atingido uma generalização particular válida para a tabuada do número seis. Faz-se necessário, portanto, avançarmos em direção a generalização válida para qualquer valor, de abrangência universal. Durante o diálogo de estudo com a turma definimos como modelo universal da multiplicação a seguinte relação:  $i \times n = t$  (Ilustração 3):

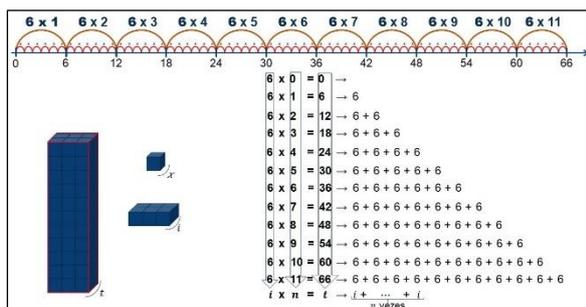


Ilustração 3 – Modelação da relação essencial na forma literal, universal

Fonte: Elaboração dos autores, 2020.

A célula que compõe a essência da multiplicação é constituída pela relação entre a quantidade de unidades de medidas básicas que compõem a unidade de medida intermediária (multiplicando), a quantidade de vezes que a unidade de medida intermediária se repete (multiplicador) e o total de unidades de medidas básicas (produto).

Suponhamos, por exemplo, uma unidade de medida intermediária **a**, que se repete por **b** vezes:  $\left( a \times b = \overbrace{a + a + a + a \dots + a}^{(b)} \right)$ .

De acordo com Caraça, (1951, p. 18) “ao número **a**, parcela que se repete, chama-se multiplicando; ao número **b** > 1, número de vezes que **a** aparece como parcela, chama-se multiplicador; aos dois em conjunto dá-se o nome de fatores; ao resultado, produto”. Na

multiplicação, o “multiplicando exerce o papel passivo e o multiplicador papel ativo”. (Caraça, 1951, p. 16).

De acordo com Hobold (2014), a modelação gráfica da relação essencial na reta numérica possibilita a revelação desses papéis: os arcos representam o multiplicando, o valor constante que se repete, a unidade de medida intermediária. O número de vezes que o multiplicando se repete é determinado pelo multiplicador.

Representamos a relação essencial da multiplicação na forma universal por meio das letras **i**, **n** e **t** ( $i \times n = t$ ). Mas poderiam ser quaisquer outras letras. O importante é que elas representam o valor da medida de qualquer grandeza discreta ou contínua seja ele natural, racional ou até mesmo irracional.

Os modelos expressos com letras, os modelos gráfico-espaciais cumprem um importante papel na formação dos conceitos matemáticos. Sua particularidade essencial é que reúnem o sentido abstrato com o concreto objetual. Falando estritamente, a abstração da relação matemática pode ser produzida somente com a ajuda das fórmulas expressadas por meio de letras. Porém, nelas se fixam apenas os resultados das ações realizadas real ou mentalmente com os objetos, enquanto que as representações espaciais (por exemplo, segmentos ou retângulos) têm uma grandeza visível (extensão), permite às crianças realizem transformações reais cujos resultados não só se podem supor, mas também observar (Davióv, 1988, p. 213-214).

Nesta perspectiva, supera-se a concepção de álgebra como aritmética generalizada ou álgebra geométrica, a partir da modelação da essência revelada por meio da interconexão entre as significações aritméticas, geométricas e algébricas. A abstração substancial (abstração da relação essencial), realizada a partir do concreto objetual possibilitou com que os acadêmicos recebessem bem as significações algébricas, embora a maioria da turma tenha manifestado aversão à álgebra no início do semestre. Ao questionarmos a tranquilidade com que lidaram com os elementos algébricos, nos responderam que agora tinham compreendido o que aquela relação significava, portanto, atribuíram sentido ao modelo abstraído. Ou seja, o problema não no caráter abstrato da álgebra, como haviam afirmado no início do semestre. Mas o modo como a álgebra é abordada no ensino tradicionalmente desenvolvido no Brasil, que já toma como ponto de partida as abstrações. Nós, durante o desenvolvimento do experimento didático desenvolvimental, percorremos o movimento que precede as abstrações, qual seja: o de redução do concreto ao abstrato.

Conforme nos ensina Kopnin (1978, p. 165), “o conhecimento *abstrato* é unilateral, daí a transição do conhecimento sensorial-concreto, multilateral ao abstrato ser em certo sentido um passo atrás, mas um passo necessário ao sucessivo avanço do conhecimento”. Ao questionarmos o que significa o modelo  $i \times n = t$ , os acadêmicos responderam:

*A12: O i é a unidade de medida intermediária, o n é a quantidade de vezes que a unidade de medida se repete, e o t é o total, é o resultado dessa operação.*

*A1: O n pode ser qualquer valor, né?*

*A12: Sim, o n é variável. O i também.*

*A21: Porque ficou n vezes ali embaixo?*

*A1: Porque ele pode repetir infinitas vezes, pode ser qualquer valor.*

*A12: Essa fórmula, ela é universal, né? Essa última que a gente criou. Então, n vezes, a gente não sabe quanto que vai dar.*

(Diálogo entre os professores pesquisadores (PP) e os acadêmicos, 2020).

No diálogo anterior os acadêmicos não mencionam o experimento objetual de medição realizado, ou seja, eles superaram a experiência de medição por incorporação. Como diz Kopnin (1978, p. 157), “embora a abstração represente o objeto não sob a forma em que ele existe na realidade, ela tem por conteúdo aquilo que realmente existe”. Por meio de abstrações, pode-se conhecer e demonstrar a necessidade e a universalidade das relações dos fenômenos. “As abstrações não substituem a contemplação viva, mas é como se as continuassem, são um novo degrau qualitativamente diverso no movimento do conhecimento (Kopnin, 1978, p. 159).

Portanto, além de termos realizado uma abstração substancial, por meio de um processo a partir do qual revelamos a essência, a lei do conceito de multiplicação. Realizamos, também, uma generalização substancial a partir da revelação das interconexões entre o singular, particular e universal. Com isso, concluímos o procedimento de redução do concreto ao abstrato. Mas, como afirma Kopnin (1978, p. 157), “se o pensamento se encerra em abstrações, deixa de ser meio de conhecimento da realidade, transformando-se em instrumento para distanciar-se dela”. Portanto, faz-se necessário ascendermos ao concreto, conforme procederemos na terceira ação de estudo.

### 4.3 Episódio formativo 3: terceira ação de estudo

*Os conceitos humanos não são imóveis, mas estão em eterno movimento, se transformam uns nos outros, desembocam uns nos outros, sem isso eles não refletem a vida ativa (Lênin)<sup>7</sup>.*

No processo de formação de conceitos, de acordo com Kopnin (1978, p. 191), “cabe enorme papel à análise enquanto movimento que parte do concreto, dado nas sensações, ao abstrato, cabendo também à síntese enquanto movimento do abstrato a um novo concreto que é o conjunto das definições abstratas”. Desse modo, no movimento de ascensão do abstrato ao concreto verifica-se a síntese de abstrações que corresponde às relações internas, conforme iniciaremos na cena 8.

#### 4.3.1 Cena 8 – Revelação das propriedades do modelo abstraído

Iniciamos o estudo das propriedades da abstração substancial da relação essencial com algumas perguntas a partir do modelo literal:  $i \times n = t$ .

*PP: Se cada pessoa consumir seis metros cúbicos de água e na casa a ser construída residirem duas pessoas, qual será a capacidade da cisterna?*

*Acadêmicos: Doze metros cúbicos.*

*PP: Se cada pessoa consumir seis metros cúbicos de água e na casa a ser construída residirem nove pessoas, qual será a capacidade da cisterna?*

*Acadêmicos: Cinquenta e quatro.*

<sup>7</sup> Apud Kopnin (1978, p. 210).

*PP: Se cada pessoa consumir seis metros cúbicos de água. E na casa a ser construída residirem vinte e quatro pessoas. Qual deverá ser a capacidade da cisterna?*

*Acadêmicos: Cento e quarenta e quatro metros cúbicos.*

(Diálogo entre os professores pesquisadores (PP) e os acadêmicos, 2020).

No diálogo anterior tínhamos por finalidade avaliar se as propriedades do modelo abstraído haviam sido realmente generalizadas para outros valores além daqueles revelados durante o experimento objetual. Com a confirmação, demos início ao processo de transformação do modelo a fim de revelar o sistema conceitual no qual está inserido o conceito de multiplicação. Pois, com a formação de apenas um modelo algébrico não concluiríamos o pensamento teórico. Faz-se necessário deduzirmos as demais conexões internas da relação essencial revelada desde o plano objetual por meio da transformação do modelo (Cena 9).

#### **4.3.2 Cena 9 – Revelação da relação interna que dá origem à primeira transformação do modelo**

Nas reflexões realizadas na cena anterior o valor desconhecido era o produto. Na sequência passamos a considerar como valor desconhecido o multiplicador, por meio das seguintes perguntas:

*PP: Supomos que João construiu uma cisterna de quarenta e dois metros cúbicos. E que cada pessoa consome seis metros cúbicos de água. Quantas pessoas irão residir na casa construída por João?*

*Acadêmicos: Sete pessoas.*

*PP: Qual operação possibilita chegar a essa resposta?*

*Acadêmicos: Divisão.*

*A26: Quarenta e dois divididos por seis igual a sete.*

*A10: No caso, o que a gente vinha usando até agora é a multiplicação, pra saber o valor  $t$  ali. Mas, agora a gente já tem o  $t$ .*

*A14: É o inverso.*

(Diálogo entre os professores pesquisadores (PP) e os acadêmicos, 2020).

A partir da compreensão da interconexão entre os elementos que compõem a essência do conceito de multiplicação, os acadêmicos deduziram sua inversa, a divisão. Ou seja, para responder a pergunta os acadêmicos realizaram um movimento de pensamento inverso. Nesse momento, se reportaram às regras memorizadas empiricamente, durante a educação básica, de que na equação, quando está multiplicando, passa para o outro lado dividindo e compreenderam porque passa para o outro lado dividindo. Portanto, iniciaram um processo de compreensão da célula, do núcleo comum entre multiplicação e divisão. Após revelarmos a relação interna que dá origem à primeira transformação do modelo, a representamos algebricamente.

#### **4.3.3 Cena 10 – Representação literal do primeiro modelo transformado**

No processo de formação do concreto, de acordo com Kopnin (1978, p. 163), uma abstração surge como continuação lógica de outra. “A ligação entre as abstrações é determinada pelas ligações no objeto, enquanto sua unificação em certo conjunto, ou melhor,

totalidade, ocorre à base de uma ideia que traduz a lei fundamental no movimento do objeto". Nesse sentido, questionamos:

*PP: Supondo que João construiu uma cisterna de  $tm^3$ . E que cada pessoa consome  $im^3$  de água. Quantas pessoas irão residir na casa construída por João?*

*Acadêmicos:  $n$  pessoas.*

*Qual modelo nos possibilita chegar nessa resposta?*

*Acadêmicos:  $t \div i = n$ .*

(Diálogo entre os professores pesquisadores (PP) e os acadêmicos, 2020).

Desse modo,  $t \div i = n$  foi revelado como continuação lógica do modelo  $i \times n = t$ . Porém, não como sequência linear na qual surge uma abstração após a outra, mas como síntese de abstrações que corresponde às relações internas, conforme continuamos na cena 11.

#### 4.3.1 Cena 11 – Revelação da relação interna que dá origem à segunda transformação do modelo

No mesmo movimento de reflexões apresentamos um novo questionamento:

*PP: Supondo que João construiu uma cisterna de vinte metros cúbicos. E que residirão quatro pessoas na casa construída por João. Quantos metros cúbicos de água cada pessoa consumirá?*

*Acadêmicos: Cinco metros cúbicos.*

*PP: Qual operação nos possibilita chegar na resposta?*

*Acadêmicos: Vinte divididos por quatro igual a cinco.*

(Diálogo entre os professores pesquisadores (PP) e os acadêmicos, 2020).

A fim de avaliarmos se as respostas anteriores refletiam a essência em estudo demos continuidade ao movimento de abstração (Cena 12).

#### 5.3.5 Cena 12 – Representação literal do segundo modelo transformado

A representação literal do segundo modelo transformado foi realizada a partir da seguinte questão:

*PP: Supondo que João construiu uma cisterna de  $tm^3$ . E que residirão  $n$  pessoas na casa construída por João. Quantos metros cúbicos de água cada pessoa consumirá?*

*Acadêmicos: Cinco metros cúbicos.*

*PP: Qual modelo nos possibilita chegar na resposta?*

*Acadêmicos:  $t \div n = i$*

(Diálogo entre os professores pesquisadores (PP) e os acadêmicos, 2020).

Ao transformarem o modelo generalizado e abstraído na segunda ação de estudo, a partir da relação de multiplicidade ( $i \times n = t$ ), em dois outros modelos por meio da relação inversa, a de multiplicidade ( $t \div i = n$  e  $t \div n = i$ ), os estudantes manifestam indícios de compreensão da célula comum aos conceitos de multiplicação e divisão.

Foi a partir desta célula que os estudantes revelaram a divisão como operação inversa da multiplicação. O primeiro modelo abstraído possibilita a determinação do produto. Os dois modelos transformados dos outros dois elementos da relação essencial possibilitam a determinação do multiplicador e multiplicando, respectivamente. Em síntese, a partir da compreensão da interconexão dos três elementos da relação essencial, é suficiente que dois de seus valores sejam conhecidos para se calcular o terceiro.

Os três modelos revelados constituem o concreto ponto de chegada. Este último não se trata de algo sensorial, mas mental. Essa mesma base possibilita a solução de diversas situações particulares e singulares, inclusive responder ao problema desencadeador, conforme a quarta ação de estudo.

#### 4.4 Episódio formativo 4: Quarta ação de estudo

Na quarta ação de estudo se concretiza o procedimento geral revelado, abstraído e generalizado nas ações precedentes por meio da síntese. A fim de encaminharmos a síntese questionamos:

*PP: Como você responderia ao problema desencadeador da situação desencadeadora de aprendizagem em análise?*

*A13: Primeiro eu acho que eu apresentaria, que existe uma unidade de medida intermediária, que é os metros cúbicos para cada pessoa. Então, a partir do momento que ele multiplicasse pelo número de pessoas teria o total de cada uma das cisternas. Teria por fim, a fórmula que a gente constituiu. Apresentando também pra ele, que ele poderia transformar essa fórmula pros dados que ele tem e obter o resultado que ele precisa.*

(Diálogo entre os professores pesquisadores (PP) e os acadêmicos, 2020).

Os demais acadêmicos concordaram com a síntese apresentada por A13. Neste momento já passava das 22h30min, tivemos que encerrar a aula. Durante a resolução coletiva a turma foi bastante participativa. Mas sempre há aqueles estudantes mais tímidos, que falam menos. A fim de avaliarmos se todos haviam se apropriado das reflexões realizadas no coletivo, solicitamos, via sistema, que cada acadêmico elaborasse, individualmente, uma carta para João explicando-lhe como ele poderia resolver o problema do dimensionamento das cisternas. As cartas foram postadas no sistema acadêmico após a aula e, de modo geral, expressavam indícios de apropriação das reflexões realizadas.

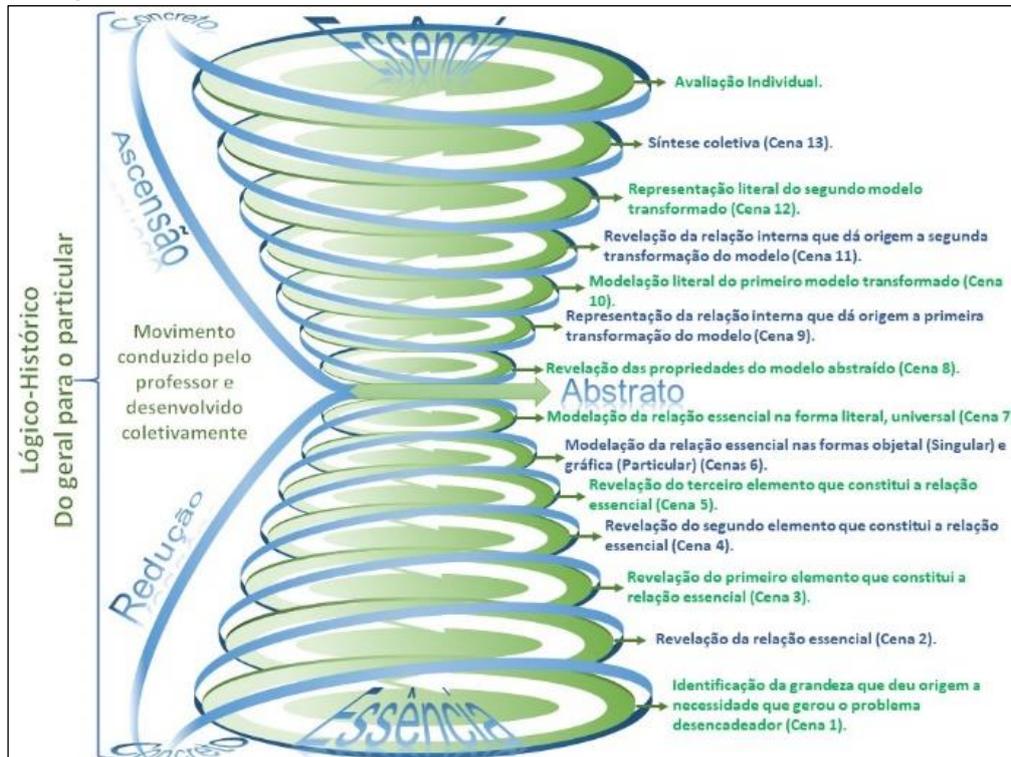
#### 5 Considerações finais

Investigamos as possibilidades de se repensar o modo de organização do ensino do conceito de multiplicação no contexto da formação inicial de professores por meio de um experimento didático desenvolvimental. Tomamos a dialética como método de ensino e de pesquisa de natureza experimental a partir do seguinte problema de pesquisa: Quais elementos devem ser considerados no modo de organização do ensino do conceito teórico de multiplicação, por meio de uma situação desencadeadora de aprendizagem, à luz da Teoria Histórico-Cultural? Ao longo da realização do experimento didático desenvolvimental tínhamos como objetivo investigar o desenvolvimento do pensamento matemático, em nível teórico, mediado pelo sistema conceitual de multiplicação, a partir da grandeza capacidade.

A pesquisa foi fundamentada na Teoria Histórico-Cultural, na Teoria do Ensino Desenvolvimental de Davídov e na Atividade Orientadora de Ensino de Moura. Os dados de pesquisa consistem nas manifestações orais dos acadêmicos e de dois professores pesquisadores, gravadas via plataforma *Zoom*, durante uma aula da disciplina Fundamentos e Metodologias de Matemática para os anos iniciais do Ensino Fundamental, do curso de Pedagogia de uma universidade localizada no sul do Estado de Santa Catarina, Brasil.

Durante a análise dos dados, revelamos as cenas que expressam o movimento de redução do concreto ao abstrato e ascensão do abstrato ao concreto, percorrido pelos acadêmicos com base em Kopnin (1978), conforme Ilustração 4:

Ilustração 4 – Síntese do movimento conceitual teórico



Fonte: Elaboração dos autores, 2020.

No desenvolvimento do movimento conceitual percorrido pelos acadêmicos (Ilustração 4) há indícios de desenvolvimento do pensamento teórico, uma vez que os estudantes tomaram como fio condutor das reflexões a essência, suas conexões internas no contexto de um sistema conceitual.

No entanto, muito há que se avançar em direção a uma organização de ensino promotor do desenvolvimento do pensamento teórico no contexto da formação de professores. De acordo com os acadêmicos colaboradores da pesquisa, a educação básica que receberam foi predominantemente empírica. Portanto, muitos são os desafios a serem enfrentados para que tenhamos uma educação matemática que contribua para o desenvolvimento do pensamento teórico em todos os níveis de ensino.

## Referências

CARAÇA, B. J. **Conceitos fundamentais da matemática**. Lisboa: Gradiva, 1951.

COSTA, J. M. C. **Tratado de arithmetica**. Lisboa: Imprensa Nacional, 1866.

DAVÍDOV, V. V. Problemas do ensino desenvolvimental: a experiência da pesquisa teórica e experimental na psicologia. **Educação Soviética**, n. 8, ago. 1988.

---

DAVÍDOV, V. V. **Tipos de generalización en la enseñanza**. 3. ed. Habana: Pueblo y Educación, 1982.

FONTES, M. S. **Experimento didático desenvolvimental em matemática no contexto do curso de pedagogia**. 2019. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade do Sul de Santa Catarina, Tubarão, 2019.

HOBOLD, E. S. F. **Proposições para o ensino da tabuada com base nas lógicas formal e dialética**. 2014. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade do Sul de Santa Catarina, Tubarão, 2014.

KOPNIN, P. V. **A dialética como lógica e teoria do conhecimento**. Rio de Janeiro: Civilização Brasileira, 1978.

MOURA, M. O. (coord.). **Controle da variação de quantidades: atividades de ensino**. São Paulo: FEUSP, 1996.

MOURA, M. O. *et al.* A atividade orientadora de ensino como unidade entre ensino e aprendizagem. *In*: MOURA, M. O. (org.). **A atividade pedagógica na teoria histórico-cultural**. Campinas: Autores Associados, 2016. p. 93-125.

ROSA, J. E.; NÓBREGA, J. N. N.; MIGUEIS, M. R. **Organização do ensino que possibilita a revelação da gênese do conceito de fração em nível teórico**. POIÉSIS - Revista do Programa de Pós-Graduação em Educação (Unisul), Tubarão, v. 16, n. 30, 2022. Disponível em <https://portaldeperiodicos.animaeducacao.com.br/index.php/Poiesis/article/view/16497>. Acesso em 26 abr. 2023.

SANTA CATARINA. Secretaria de Estado da Educação. **Currículo base da educação infantil e do ensino fundamental do território catarinense**. Florianópolis: SED, 2019.

SILVA, M. M. **A apropriação dos aspectos constituintes da atividade pedagógica por professores de matemática em formação inicial**. 2018. Tese (Doutorado em Educação em Ciências e Matemática) – Universidade Federal de Goiás, Goiânia, 2018.