

## Visualização em Geometria, aproximações entre as perspectivas de Duval e Gutiérrez: um estudo com acadêmicos de um curso de licenciatura em Matemática

Visualization in Geometry, approximations between the perspectives of Duval and Gutiérrez: a study with undergraduate Mathematics students

Visualización en Geometría, aproximaciones entre las perspectivas de Duval y Gutiérrez: un estudio con estudiantes de pregrado en Matemáticas

Raquel Polizeli Corradi<sup>1</sup>

 [0000-0002-0615-3716]

Valdeni Soliani Franco<sup>2</sup>

 [0000-0002-9202-4434]

### Resumo

Este artigo é parte de uma pesquisa de doutorado em Educação Matemática e se propõe a analisar a atividade de visualização, colaborando para a discussão da temática em cursos de licenciatura em Matemática, contribuindo para que mais alternativas que favoreçam a aprendizagem em Geometria sejam encontradas. Tem-se por objetivo investigar a atividade de visualização na resolução de uma tarefa de Geometria por acadêmicos de um curso de licenciatura em Matemática de uma Universidade ao norte do estado do Paraná, ao ingressarem no curso e ao concluírem as disciplinas de Geometria constantes na estrutura curricular do referido curso, e também identificar se os conceitos Geométricos requeridos na tarefa estão matematicamente consolidados. Trata-se uma pesquisa qualitativa, na perspectiva do paradigma interpretativo, segundo a modalidade estudo de casos múltiplos. A fundamentação teórica para análise dos dados se pauta nas ideias apresentadas por Duval e por Gutiérrez sobre a visualização em Geometria. Foi observado que os elementos e operações que compõe a visualização ocorrem, de modo geral, nos dois grupos. Porém, notou-se uma diferença - ainda que pequena- entre o desempenho dos integrantes dos grupos. Foram observadas dificuldades em relação ao conceito formal de quadrado e ao emprego de alguns dos elementos e operações que compõe a visualização pela perspectiva adotada.

**Palavras-chave:** Licenciatura em Matemática. Ensino de geometria. Habilidades de visualização. Visualização geométrica.

### Abstract

This article is part of a doctoral degree research in Mathematics Education. It aims to analyze the visualization activity and collaborate with the discussion of the theme in undergraduate courses in Mathematics, so that more alternatives that favor learning in Geometry could be found. The objective is to investigate the visualization activity in the resolution of a Geometry activity by students of a Mathematics Degree course at a University in the north of the State of Paraná, when joining the course and after completing the Geometry subjects contained in the structure curriculum of that course and also, to identify if the Geometric concepts required in the activity are mathematically consolidated.

<sup>1</sup> [raquelpolizeli rp@gmail.com](mailto:raquelpolizeli rp@gmail.com), Mestre em Matemática, professora do Magistério Superior no Departamento de Matemática, Universidade Tecnológica Federal do Paraná-UTFPR, Campo Mourão/Paraná/Brasil.

<sup>2</sup> [vsfranco@gmail.com](mailto:vsfranco@gmail.com), Doutor em Matemática, professor do programa de Pós-graduação em Educação para a Ciência e a Matemática da Universidade Estadual de Maringá - UEM, Maringá/Paraná/Brasil.

This is a qualitative research, from the perspective of the interpretive paradigm, according to the multiple case study modality. The theoretical principles for data analysis are based on the ideas presented by Duval and Gutiérrez about visualization in Geometry. It was observed that the elements and operations that make the visualization occurred in both groups, however, there was a difference, albeit simple, between the performance of the members of the different groups. Difficulties were observed in relation to the concept of square and the application of some of the elements and operations that make up the visualization from the perspective adopted.

**Keywords:** Degree in Mathematics. Geometry teaching. Visualization ability. Geometric visualization.

### Resumen

Este artículo es parte de una investigación doctoral en Educación Matemática. Su objetivo es analizar la actividad de visualización, colaborando para la discusión del tema en cursos de pregrado en Matemáticas y contribuyendo para que se encuentren más alternativas que favorezcan el aprendizaje en Geometría. El objetivo es investigar la actividad de visualización en la resolución de una tarea de Geometría por parte de los estudiantes de un curso de Licenciatura en Matemáticas en una universidad en el norte del Estado de Paraná al ingresar al curso y al completar las asignaturas de Geometría contenidas en la estructura plan de estudios de ese curso y, también, para identificar si los conceptos geométricos requeridos en la tarea están matemáticamente consolidados. Esta es una investigación cualitativa, desde la perspectiva del paradigma interpretativo, según la modalidad de estudio de caso múltiple. La base teórica para el análisis de datos se basa en las ideas presentadas por Duval y Gutiérrez sobre la visualización en Geometría. Se observó que los elementos y las operaciones que conforman la visualización ocurren en general en ambos grupos, sin embargo, hubo una diferencia -aunque simple- entre el desempeño de los miembros de los diferentes grupos. Se observaron dificultades en relación con el concepto de cuadrado y el uso de algunos de los elementos y operaciones que conforman la visualización desde la perspectiva adoptada.

**Palabras claves:** Grado de Matemáticas. Enseñanza de geometría. Habilidad de visualización. Visualización geométrica.

### 1 Introdução

Este trabalho é parte de uma pesquisa de doutorado em Educação Matemática desenvolvida pela primeira autora, sob a orientação do segundo autor. Foi motivada pelos estudos realizados no Grupo de Pesquisa em Ensino de Geometria – GPEG, em que um dos principais assuntos de interesse atualmente é a visualização em Geometria.

Pesquisas ligadas à Educação Matemática têm enfatizado a importância da visualização e do raciocínio visual para o ensino e a aprendizagem da Matemática, em particular da Geometria, como: Presmeg (1986, 2006), Godino et al. (2012), Gutiérrez (1992, 1996a, 1996b), Fernández Blanco (2011, 2013), Duval (1999b, 2015), Kawamoto (2016), entre outros.

Foi observado, em um levantamento realizado, a importância da visualização e a multiplicidade de conceitos ligados a este termo. Buratto (2012) lista dezoito concepções de visualização em Educação Matemática. Neste estudo entende-se que a visualização vai além do simples ato de ver ou da percepção. Dentre as concepções de visualização encontradas, as de Duval (2015) e de Gutiérrez (1992, 1996a, 1996b) nos chamaram a atenção por abordarem a visualização como um processo que deve ser incentivado e por entendermos que se complementam.

Segundo Duval (1999b), a visualização é entendida como “uma atividade cognitiva que é intrinsecamente semiótica” (DUVAL, 1999b, p. 13, tradução nossa). Para Duval (2015), a visualização em Geometria requer a integração entre as funções heurísticas (que perpassa pela desconstrução dimensional) e discursiva (relacionada às propriedades matemáticas), realizada passando, se necessário, por uma função de suporte para verificações concretas (medições, cálculos etc.).

Para Gutiérrez o processo de visualização “é um tipo de atividade de raciocínio baseada no uso de elementos visuais ou espaciais, seja mental ou físico” (GUTIÉRREZ, 1996a, p. 10, tradução nossa), que integra quatro elementos: imagens mentais; as representações externas; as ações de interpretação de informações para geração de imagens e também a “leitura” de imagens para obtenção de informações a partir dela; e as habilidades para a visualização.

Na seção de fundamentação teórica explanaremos sobre cada conceito que integra as concepções de visualização dos dois autores e discutiremos as aproximações e diferenças entre elas, clarificando a nossa opção, nesta pesquisa, por adotar metodologicamente a visualização como uma atividade cognitiva intrinsecamente semiótica, na qual são articuladas imagens mentais, representações externas, ações de interpretação para a visualização e as habilidades para a visualização, de modo que proporcione a integração entre as funções heurística e discursiva.

Em seus trabalhos, Gutiérrez (1992, 1996a, 1996b) e Fernández Blanco (2011, 2013, 2014) estudaram a visualização em futuros professores espanhóis com foco na Geometria Euclidiana. A partir dessas leituras surgiram indagações sobre como acadêmicos do curso de licenciatura em Matemática de uma universidade no Brasil resolveriam tarefas de Geometria Euclidiana em que a visualização é requerida, se há diferenças na atividade de visualização de alunos ingressantes e de concluintes e quais conceitos Geométricos requeridos nas tarefas estão matematicamente consolidados para eles.

Esses questionamentos nortearam nossa pesquisa, que tomou a forma de um estudo diagnóstico no contexto da formação inicial de professores de Matemática, visando compreender se há diferenças na atividade de visualização e na consolidação de conceitos da Geometria Euclidiana requeridos para a resolução de tarefas por alunos de dois grupos: ingressantes e concluintes do curso de Licenciatura em Matemática de uma universidade ao norte do Estado do Paraná.

Neste texto, a tarefa é compreendida conforme Ponte (2005) e, aqui, a tarefa é um problema de exploração no contexto geométrico.

Esta pesquisa busca, além de analisar a visualização nos dois grupos de acadêmicos, colaborar para a discussão sobre a temática da visualização em cursos de Licenciatura em Matemática e contribuir para que mais alternativas que favoreçam a aprendizagem em Geometria sejam encontradas.

Assim, este estudo está inserido no âmbito da formação inicial de professores de Matemática e tem sua relevância e originalidade para a Educação Matemática por investigar a visualização em futuros professores e promover a visualização como uma ferramenta a mais, que pode auxiliar no ensino e na aprendizagem de Geometria. Essa afirmação é pautada na fala de Duval (2015) de que, principalmente na Geometria, as figuras servem como “suporte à intuição e evidenciam em um objeto visível relações ou hipótese que não são claramente evidentes em uma declaração verbal” (DUVAL, 2015, p. 1, tradução nossa). Além disso, a

visualização também auxilia na atribuição da concretude na elaboração e aquisição do conhecimento Matemático, como explica Santos (2014).

Desse modo, este trabalho tem por objetivo investigar a atividade de visualização na resolução de uma tarefa de Geometria, em especial a mobilização de imagens mentais, das ações de interpretação de informações e das habilidades mobilizadas para visualização, bem como a coordenação entre as funções heurística e discursiva pelos acadêmicos de um curso de Licenciatura em Matemática de uma Universidade ao norte do Estado do Paraná, ao ingressar no curso e ao concluir as disciplinas de Geometria constantes na estrutura curricular do referido curso, por meio de uma categorização a priori. E também, identificar se os conceitos Geométricos requeridos nas tarefas estão matematicamente consolidados para ambos os grupos.

Para alcançar o objetivo proposto, realizaremos uma discussão sobre a visualização apresentando os principais termos envolvidos nas concepções de Duval e Gutiérrez sobre a visualização em Geometria, bem como as aproximações observadas pela autora da presente pesquisa entre as duas perspectivas.

## 2 Fundamentação teórica

Gutiérrez (1996a) redefine e amplia o conceito de visualização em matemática, considera-a como um tipo de atividade do raciocínio, capaz de integrar quatro elementos principais, que são: as imagens mentais, as representações externas, os processos de visualização e as habilidades de visualização.

Ele considera imagens visuais (físicas ou mentais) como os objetos que são criados, usados e transformados na atividade de visualização espacial. Essas podem ser, como dito em Presmeg (1986), imagens pictóricas (imagens reais, concretas); imagens padrão (esquemas); imagens de memória de fórmulas; imagens Cinestésicas (em movimento através da ação corporal); imagens dinâmicas.

Gutiérrez (1996a) considera uma representação externa pertinente à visualização como qualquer tipo de representação gráfica ou verbal de conceitos ou propriedades incluindo figuras, desenhos, diagramas etc., em folha de papel, ou com modelos concretos, entre outras.

Os processos de visualização são ações físicas ou mentais, em que imagens mentais estão envolvidas. Gutiérrez (1992, 1996a) cita os dois processos inversos realizados na visualização elencados por Bishop (1983): a “interpretação visual de informações” para criar imagens mentais e a “interpretação de informações obtidas a partir de imagens” para gerar informações. A interpretação de informações obtidas a partir de figuras é um processo de leitura, compreensão e interpretação das representações usadas em matemática para extrair as informações contidas nestas.

Nesta pesquisa, em lugar de processos de visualização, será utilizado o termo *ações de interpretação para a visualização*, com o intuito de clarificar o conceito e evitar confusão com o processo global de visualização definido neste trabalho.

As habilidades de visualização, em Matemática, são habilidades que “um sujeito deve adquirir e desenvolver para realizar os processos necessários, com as imagens mentais específicas de um dado problema” (GUTIÉRREZ, 1996a, p. 10).

Já para Duval (2015), a visualização é a combinação ou coordenação entre as funções heurística e discursiva, sendo centrada nas operações cognitivas sobre as figuras geométricas.

Esse autor compreende que as figuras geométricas possuem três aspectos que podem levar a três maneiras distintas de vê-las e que sua compreensão depende principalmente da conexão entre as apreensões perceptiva, operatória e discursiva, ligadas às funções heurística e discursiva.

Como aspectos das figuras geométricas, Duval (2015) cita: serem um campo de exploração visual para resolver problemas, serem instrumentalmente construídas e estarem necessariamente associados e subordinados a instruções que determinam as propriedades e os objetos que representam (teoria matemática).

Esses aspectos correspondem a três usos diferentes das figuras, e essas três maneiras de "ver" não têm nada em comum e são simultaneamente incompatíveis, já que o primeiro é independente do requisito matemático, mas requer que deixemos os limites estreitos e estáticos da evidência perceptiva, o segundo aspecto está relacionado à percepção e o último aspecto relaciona-se ao uso matemático vinculado ao vocabulário geométrico (a figura condensa declarações de definições e teoremas) e muitas vezes é esperado que somente as propriedades dadas nas hipóteses do enunciado associado à figura sejam visualmente consideradas (esse uso matemático exige uma maneira de ver que, muitas vezes, vai contra as evidências perceptivas).

Em Duval (2015), para o uso efetivo de uma figura em um dado problema é necessária uma análise dualística e cognitiva da figura, levando em conta as três componentes relacionadas à forma (unidades figurais), grandezas e propriedades de uma figura, e acionando os três tipos de operações subjacentes à visualização geométrica.

A análise dualística envolve o ato de relacionar a percepção da figura com o enunciado do problema. A análise cognitiva parte da dualística, considera as três componentes da figura e emprega a visualização geométrica, que por sua vez envolve as funções: heurística (relacionada ao reconhecimento de formas e modificações na figura); de suporte (relacionada a verificações concretas, como medições e cálculos); e discursiva (relacionada às inferências matemáticas).

Para Duval (2015), é necessário que haja um "treinamento" para desenvolver o raciocínio para a visualização em Geometria. Do mesmo modo, Gutiérrez (1996a) diz que é necessário adquirir e desenvolver as habilidades para realizar os processos necessários para a visualização geométrica.

Embora, Gutiérrez (1996a) não utilize diretamente o termo "atividade cognitiva", entende a visualização como uma atividade do raciocínio. E nós entendemos que a mobilização das habilidades para a visualização elencadas por Gutiérrez (1996a) compõe um processo cognitivo na visualização ligado ao uso da função heurística (sendo algumas delas tratamentos, no sentido de Duval (2012b), dentro do registro figural) como, por exemplo, a percepção figura-fundo tem relação com a desconstrução dimensional; a rotação mental tem relação com a reconfiguração de uma composição etc.

As imagens mentais, como parte cognitiva do raciocínio, também permeiam as três operações que compõem a visualização segundo Duval (2015). As ações de interpretação para formação de uma imagem e interpretação de informação a partir da figura, que compõe a visualização segundo Gutiérrez (1996a) e que, de acordo com ele, são "processos inversos" (GUTIÉRREZ, 1992, p 45) que se assemelham à passagem entre as funções heurística e discursiva elencadas por Duval (2015) e consistem em conversões, de acordo com Duval (2012b).

Faz parte da interpretação visual criar a imagem a partir das informações, ou seja, das representações discursivas (processo de transição – conversão – do discursivo para o figural), enquanto o processo de interpretação de informação a partir da figura contempla “ver” as propriedades matemáticas que estão resumidas na figura (processo de transição da função heurística para a discursiva, ou seja, conversão do registro figural para a língua natural).

Pode-se considerar que a visualização, tanto no sentido de Duval quanto de Gutiérrez, consiste em uma atividade de raciocínio que depende de uma elaboração cognitiva que reconheça as figuras e as relacione com os elementos visuais ou espaciais, sejam mentais ou físicos, que passam por representações semióticas (podendo ser registros em língua natural, registros figurais etc.). Pela ideia apresentada por Duval, a visualização é baseada na “produção de uma representação semiótica” (DUVAL, 1999, p. 12), dessa forma, a visualização é realizada pela atividade de representação, precisando dela para que a visualização se concretize.

Uma das principais diferenças entre as perspectivas dos dois autores está no fato de que, para Duval, o reconhecimento das formas 1D e 2D são de suma importância para realizar a relação com a função matemática, o que possibilitaria o melhor desempenho na aprendizagem dos conceitos de Geometria e também na melhor compreensão do funcionamento dos registros de representação semióticos utilizados em Geometria, bem como os tratamentos internos a eles e a conversão entre pelo menos dois registros relacionados a um mesmo objeto geométrico.

Pelo exposto, entendemos que as perspectivas de ambos os autores se complementam e fornecem uma concepção de visualização geométrica mais densa, o que justifica a opção metodológica de visualização geométrica feita nesta pesquisa e forma a base para as análises realizadas neste trabalho.

### **3 Viés metodológico**

Esta pesquisa segue a abordagem qualitativa na perspectiva do paradigma interpretativo, segundo a modalidade estudo de casos múltiplos. A fundamentação teórica para análise dos dados se pauta nas ideias apresentadas por Duval e por Gutiérrez sobre a visualização em Geometria.

A coleta de dados se deu através da aplicação de uma entrevista semiestruturada, por meio de tarefas pautadas nos referenciais teóricos descritos, realizada individualmente com cada participante. Neste artigo serão apresentadas a análise e as discussões referentes a uma dessas tarefas.

Durante a entrevista foram realizadas a observação e o registro em notas de campo, a gravação em áudio e a coleta de suas produções escritas.

Participaram da pesquisa dezesseis acadêmicos do curso de licenciatura em Matemática de uma universidade do norte do Paraná, sendo oito acadêmicos ingressantes que participavam do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (PIBID) e oito que já haviam cursado todas as disciplinas de Geometria do curso e se dispuseram ao convite. Por motivos de organização e sigilo, chamou-se o grupo dos ingressantes de I (GI) e o grupo dos participantes que já haviam concluído as disciplinas de Geometria de grupo J (GJ), sendo essas as duas unidades de análise do estudo de caso de acordo com Yin (2005).

Na análise e interpretação dos dados coletados nesta pesquisa, procura-se identificar e evidenciar os principais elementos apresentados na resposta à tarefa de Geometria Euclidiana proposta na entrevista. Busca-se realizar uma análise cognitiva e uma análise da

Matemática. A primeira se refere à utilização da visualização geométrica de acordo com o conceito adotado nesta pesquisa, e a segunda se refere ao encaminhamento das respostas e se essas são matematicamente aceitáveis.

A opção por realizar as duas análises separadamente se deve ao fato levantado por Duval (2008, p. 27) de que “um sucesso matemático não corresponde a um sucesso cognitivo” na maioria das vezes e que, do ponto de vista cognitivo, o fato de haver acertos pontuais (dentro de um único registro de representação semiótico) não significa haver sucesso cognitivo, pois para que esse ocorra é necessário sucesso em toda uma sequência de itens (são necessários acertos dentro de pelo menos dois registros de representação semiótico e ainda a passagem entre eles).

Desse modo, pautados nas concepções de Duval (1999a, 2011, 2015) e Gutiérrez (1992, 1996a), a análise da tarefa ocorrerá em três partes, sendo as duas primeiras referentes à análise cognitiva e a terceira referente à análise Matemática, denominadas por:

**Bloco 1:** Serão identificadas a mobilização e a coordenação dos quatro elementos que compõe a visualização segundo Gutiérrez (1996a): a produção de imagem mental, a utilização de representações externas, a presença de ações de interpretação de informação e a mobilização das habilidades para a visualização;

**bloco 2:** Consiste na identificação da utilização das funções heurística, de suporte e discursiva e a coordenação dessas três operações subjacentes à visualização segundo Duval (2015), levando as conversões entre registros de representação semióticos e proporcionando a conexão entre as apreensões operatória e discursiva;

**bloco 3:** Será verificado se as justificativas e respostas são matematicamente aceitáveis, em conformidade com Duval (2008).

Seguindo por esse caminho, foram delineadas dez categorias de análise acerca das produções matemáticas dos entrevistados, estabelecidas a priori. Que emergiram do conceito de visualização geométrica adotado neste estudo, fruto das interpretações das pesquisas de Duval (1999a, 2011, 2015) e Gutiérrez (1992, 1996a). O Quadro 1 apresenta essas categorias de análise:

**Quadro 1 - Categorias de análise para as produções matemáticas dos entrevistados**

Categorias	Aspectos considerados nas produções matemática dos entrevistados
Produção de imagem mental	Indícios de produção e tipos de imagem baseado na resolução escrita e na fala do participante.
Utilização de representação externa	Utilização da imagem dada e/ou produção de outras representações externas na resolução escrita e na fala do participante.
Realização de ações de interpretação de informação	Cria imagem a partir das informações dadas e/ou conceitos e propriedades ou interpreta a figura extraindo propriedades matemáticas.
Mobilização de habilidades para a visualização	Utiliza as habilidades de percepção figura-fundo; conservação da percepção; percepção de posição espacial; percepção de relação espacial; discriminação visual, rotação mental e memória visual.
Emprego da função heurística	Reações imediatas e automáticas diante da figura; identificação de aspectos importantes da figura (por exemplo: unidades figurais, propriedades, formas, subfiguras); realização de modificações (por exemplo: desconstrução dimensional, reorganizações, reconfigurações, sobreposições, justaposição).
Emprego da função suporte	Realização de medições e cálculos.

Continua

Continuação do Quadro 1

Emprego da função Discursiva	Aplicação de uma definição ou propriedade para inferir uma outra, relaciona as hipóteses do enunciado à figura geométrica a ser utilizada, apresenta justificativa matematicamente coerentes, realiza demonstrações.
Realiza conversões	Realiza a passagem de um registro de representação semiótico para outro ao responder a tarefa (por exemplo: relaciona figuras geométricas às suas propriedades ou conceitos matemáticos, ou o contrário: nesses casos a conversão é entre os registros figurais e língua natural, ou a partir da figura geométrica realizar cálculos (conversão entre os registros figurais e algébrico).
Respostas matematicamente aceitáveis	Apresenta respostas aceitáveis em termos matemáticos, justifica de modo matematicamente coerente.
Respostas matematicamente não-aceitáveis	Não apresenta resposta, ou apresenta respostas não-aceitáveis em termos matemáticos, apresenta justificativas sem coerência matemática.

Fonte: A autora, 2020.

A partir da categorização será analisado o processo de visualização como um todo em ambos os grupos estudados para, assim, apresentar inferências sobre os objetivos da pesquisa. Na sequência serão apresentadas as descrições, as análises e discussões sobre a tarefa analisada.

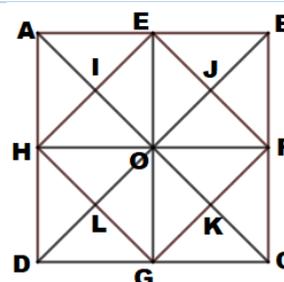
#### 4 Apresentação e discussão dos resultados

No Quadro 2 apresentamos a tarefa *Identificando os quadrados*, baseada em uma tarefa citada por Kawamoto (2016) e na sequência os pressupostos que nortearam a categorização para análise desta:

##### Quadro 2 – Identificando os quadrados

Observe a figura ao lado e responda:

- Identifique quantos quadrados há na figura ao lado. Descreva com suas palavras o que o levou a sua conclusão.
- Identifique os segmentos paralelos às diagonais do quadrilátero ABCD.
- Explique com suas palavras qual é a relação entre os quadriláteros *AEOH*, *EBFO*, *OFCG* e *HOGD*.
- O quadrilátero *EFGH* pode ser considerado como um quadrado. Explique com suas palavras o porquê.



Fonte: A autora, baseada em tarefa citada por Kawamoto (2016, p. 38), 2020.

A análise das produções escritas e orais dos entrevistados ao responderem a tarefa 1 segue uma organização em blocos, conforme descritos no viés metodológico.

O Quadro 3 apresenta fragmentos das falas dos participantes do grupo J quanto ao que definem por quadrado:

##### Quadro 3– Definições de quadrado emergentes no GJ

GJ	Definição de Quadrado
J1	"Quadrilátero com ângulos retos e lados congruentes"
J2	"Uma região quadrangular que possui seus lados paralelos dois a dois e seus ângulos internos de 90°"

Continua

Continuação do Quadro 3

J3	<i>“Quadrilátero com quatro lados iguais e ângulos congruentes”</i>
J4	<i>“Quadrilátero com quatro ângulos retos e arestas iguais”</i>
J5; J6	<i>“Figura com quatro lados iguais e ângulos internos de 90°”</i>
J7	<i>“Figura com todas as medidas dos lados iguais e ângulos de 90°”</i>
J8	<i>“Quadrilátero com quatro lados iguais e quatro ângulos de 90°”</i>

Fonte: A autora com base nas produções orais dos entrevistados, 2020.

É possível observar que, de acordo com o conceito matemático de quadrado, a resposta apresentada por J1 é matematicamente aceitável, já que apresenta as características relacionadas à figura (quadrilátero), aos lados congruentes e aos ângulos congruentes (retos).

As respostas de J2 e de J7 não caracterizam um quadrado, pois J2 não especifica uma das características do quadrado, a congruência entre os lados da figura. A resposta de J7 também não caracteriza um quadrado pelo fato de não especificar que a figura é um polígono plano ou que é um quadrilátero.

Já as outras cinco respostas se aproximam do conceito matemático de quadrado. Pode-se inferir que eles têm ideia do que é um quadrado, porém não são matematicamente aceitáveis por apresentarem incoerências do ponto de vista formal da matemática em sua formulação. Utilizam o termo “lados ou arestas iguais” ao invés de “lados de mesma medida” ou “lados congruentes”, ou seja, não utilizam em suas respostas a palavra “medida” dos lados, não considerando a característica de que lados são segmentos e, portanto, não são números.

No Quadro 4 apresentaremos o entendimento sobre quadrado obtidos a partir dos fragmentos das produções orais dos entrevistados do grupo de alunos ingressantes no curso de licenciatura em Matemática:

#### Quadro 4 – Definições de quadrado emergentes no G1

G1	Definição de Quadrado
11, 15, 16, 17, 18	<i>“Quatro lados iguais e quatro ângulos iguais de 90°”</i>
12, 13	<i>“Figura com quatro lados iguais”</i>
14	<i>“Paralelogramos com os 4 lados iguais”</i>

Fonte: A autora com base nas produções orais dos entrevistados, 2020.

Podemos observar que as respostas apresentadas pelos integrantes do G1 não são matematicamente aceitáveis, por apresentarem incoerências do ponto de vista formal da Matemática. Nenhum dos entrevistados do G1 expressa a característica de que lados são segmentos e não se atentam ao uso do termo “medida dos lados” em suas respostas, como verificado nas respostas de cinco dos integrantes do GJ. Mas no caso do G1, as dificuldades vão além da troca dos termos. Pode-se observar que cinco integrantes do G1 (11, 15, 16, 17, 18) apresentaram respostas que não explicitam a característica de o quadrado ser uma figura poligonal plana com quatro lados ou um quadrilátero. As respostas de 12, 13 e 14 não apresentam a característica de que os quatro ângulos de um quadrado devem ser congruentes. As respostas de 12 e 13 ainda podem levar à interpretação errônea de que uma figura com mais de quatro lados em que quatro deles tenham a mesma medida é um quadrado. Pela resposta de 14, os losangos poderiam ser considerados como quadrados.

Pelo exposto, é possível notar que seis dos integrantes do GJ, têm uma ideia matematicamente aceitável do conceito de quadrado (sendo que uma formaliza corretamente, e cinco dos oito apresentam dificuldade relacionada aos termos ligados à

linguagem formal). Assim, há evidências do emprego da função discursiva em relação ao conceito de quadrado, porém este pode ser melhor trabalhado principalmente nos integrantes do GI.

Com respeito às produções escritas e orais dos entrevistados do GJ, em relação ao item *a* da tarefa, foi observado que cinco dos entrevistados (J2, J3, J6, J7 e J8) registraram “10 quadrados”. Uma das respostas, dada por J1, apresenta os dez quadrados identificando-os por meio das letras correspondentes aos seus quatro vértices. Nas produções escritas de J4 e J5, observa-se que identificam que há dez quadrados e explicam ter visto inicialmente um quadrado maior (ABCD), contendo outros quatro em seu interior e outro quadrado (EFGH) formado pelos pontos médios dos lados do maior que também contém outros quatro quadrados. Oralmente, J1, J4, J5 e J8 deram explicações equivalentes a ter visto inicialmente o quadrado ABCD contendo outros quatro em seu interior e o quadrado EFGH também contém outros quatro quadrados. Os demais entrevistados fizeram a contagem apontando cada um dos dez quadrados.

Podemos observar que todos os integrantes do GJ apresentaram resposta matematicamente aceitável em relação ao número de quadrados. Já no GI, cinco dos participantes o fizeram. No caso destes entrevistados, evidenciou-se o uso da função heurística, o acionamento da habilidade de percepção figura-fundo e da discriminação visual, a ativação da ação de interpretação de informação e o uso da representação externa.

Com respeito às produções dos integrantes do GI, se observou nos registros escritos de cinco participantes (I1, I2, I4, I5 e I6) a resposta identificando dez quadrados. Sendo que I1 identifica os quadrados como sendo formados a partir dos triângulos presentes como subfiguras e conta-os um a um. Os entrevistados I2 e I5 identificam os dez quadrados contando um a um. O participante I4 identifica um a um os dez quadrados utilizando as letras que nomeiam seus quatro vértices. O entrevistado I6 identificou os quadrados ABCD e EFGH (chama EFGH de “quadrado rotacionado”) e mais quatro quadrados no interior de cada um deles, totalizando dez. Três participantes (I3, I7, I8) identificaram somente seis quadrados contando-os um a um, sendo que I8 refere-se ao quadrado EFGH como “quadrado inclinado”. As respostas orais de cada entrevistado foram similares às registradas por escrito, porém I3 e I7 dizem ter visto primeiro o quadrado ABCD e quatro quadrados em seu interior e depois o quadrado EFGH, totalizando seis. Em sua fala, I6 refere-se ao quadrado EFGH e os quatro em seu interior como quadrados “inclinados”. O participante I8 diz ter visto primeiro o quadrado EFGH e depois ter identificado o quadrado ABCD e outros quatro em seu interior.

É possível observar maior dificuldade na apresentação das repostas por parte dos integrantes do GI, já que três de seus integrantes responderam que na figura há seis quadrados. Estes deram indícios de que pode haver para eles uma dificuldade no emprego da função heurística, na mobilização das habilidades de percepção figura-fundo e de discriminação visual e/ou na ação de interpretação de informação e uso da representação externa.

Notamos, durante a resolução da tarefa, três dos entrevistados do GJ realizaram a ação de girar a folha contendo o enunciado e o uso dos termos “quadrado rotacionado” e “quadrado inclinado” por parte de dois integrantes do GI. Esses detalhes nos levam a inferir que há indícios de produção de imagens mentais e, também, uma dificuldade na mobilização da habilidade de rotação mental, indicando a possível produção de uma imagem mental de quadrado incoerente do ponto de vista matemático, por considerarem que os quadrados são figuras com um dos pares de lados oposto na horizontal.

Com respeito ao item *b* nos registros escritos da resposta, se observou que sete entrevistados do GJ reconheceram as diagonais do quadrado ABCD como sendo AC e BD, bem como os segmentos paralelos a elas (EF, HG paralelos à AC e EH, FG paralelos à BD). Somente a resposta escrita de J5 não deixa claro tal reconhecimento. Em sua resposta, J1 elenca -além dos segmentos paralelos citados- os segmentos contidos neles (EJ, JF, HL, LG paralelos à AC e EI, IH, FK, KG paralelos à BD). O participante J4 escreve o termo “reta” no lugar de segmento. Em sua resposta escrita, J8 utiliza de forma incorreta setas de implicações. Oralmente, as respostas de cada entrevistado foram similares às registradas por escrito, exceto a de J5. Esse participante chega a identificar as diagonais AC e BD durante sua fala, porém ao fazer o registro escrito não deixa este fato claro. Pela observação da entrevista, pôde-se notar que J5 se expressa de modo errôneo, escrevendo apenas “*diagonais*” ao invés de escrever a sentença “*segmentos paralelos às diagonais*”.

No caso dos integrantes do GI, estes identificam nos registros escritos as diagonais do quadrado ABCD como sendo AC e BD, bem como os segmentos paralelos a elas (EF, HG paralelos à AC e EH, FG paralelos à BD). Assim como na resposta escrita de J5, I4 registra os segmentos que são paralelos às diagonais, mas não expõe quais são as diagonais em questão, porém em sua fala ele identifica AC e BD como as diagonais de ABCD, e sua resposta escrita deixa claro que ele está se referindo aos segmentos paralelos às diagonais, como pedido no enunciado. As respostas orais dos demais não diferem das que apresentaram por escrito.

Ambas as turmas tiveram resultados próximos, os participantes demonstram ter noção dos conceitos de diagonal e segmentos paralelos e os reconhecem na figura. Nota-se que eles interpretam as informações obtidas a partir de imagens dadas, evidenciando a realização da ação de interpretação da figura (consequentemente, utilizando a representação externa) extraíndo os conceitos evocados. É possível notar que os entrevistados dos dois grupos mobilizaram a habilidade de percepção de relações espaciais ao relacionar os quadrados entre si, as diagonais e os segmentos paralelos a elas. Pelo exposto, nota-se a utilização da função heurística e da função discursiva, embora as respostas de três integrantes do GJ e um do GI façam o uso incorreto de conceitos e notações matemáticas e não estejam bem redigidas segundo o enunciado e o rigor matemático. Em sua resposta, J4 utiliza o termo “*reta*” no lugar de “segmento”, J8 utiliza setas de implicação separando os pares de segmento paralelos e as respostas de J5 e I4 apresentam somente os segmentos, sem especificar as diagonais a que são paralelos.

Em relação às respostas dadas ao item *c* da tarefa, observando os registros escritos dos integrantes do GJ, verificamos que três deles (J2, J3 e J8) identificaram e registraram que os quadriláteros AEOH, EBFO, OFCG e HOGD são congruentes. Os participantes J1, J4, J5, J6, J7, assim como J8, apresentaram outras características que consideraram como relações entre os quadriláteros. Dentre as relações elencadas estão: AEOH, EBFO, OFCG, HOGD compartilham o vértice *O* (J1, J4, J6); compartilham um mesmo lado (J7); têm mesma área (J1, J4, J6); têm mesmo perímetro (J1, J4, J6); compõe o quadrilátero ABCD (J1, J7); têm lados de mesma medida (J1, J5, J6); ângulos internos retos (J5); são semelhantes ao quadrilátero ABCD, sendo a razão de semelhança 1/2 (J8).

Com respeito ao GI, nos registros escritos pode ser observada a apresentação de algumas características consideradas como relações, porém a congruência entre os quatro quadriláteros não foi elencada. Foi possível notar, além das características apontadas pelo GJ, outras como: reconhecer que os quadriláteros são semelhantes entre si; que não são iguais, por estarem em posições distintas; que são equivalentes.

Pode-se notar uma dificuldade em relação ao conhecimento e emprego do conceito de congruência. Somente três entrevistados do GJ utilizaram o termo em suas respostas, caracterizando uma resposta matematicamente aceitável, considerando que os entrevistados estão no nível superior de ensino. A dificuldade se mostrou maior entre os integrantes do GI, em que não houve manifestação sobre essa relação. Porém, foi observado que em ambos os grupos houve a identificação de características comuns aos quadriláteros AEOH, EBFO, OFCG e HOGD, evidenciando o uso da representação externa, da ação de interpretação da figura, da utilização da função heurística, da mobilização das habilidades de conservação da percepção, a percepção de relações espaciais e a função discursiva. Em ambos os grupos foram observadas dificuldades em formular respostas elaboradas utilizando corretamente os termos matemáticos na escrita relacionada à função discursiva.

Com respeito ao item *d* da tarefa, observando os registros escritos das respostas a esse item realizados pelos integrantes do GJ, se pôde notar que quatro deles (J1, J2, J5 e J8) buscaram mostrar que os lados de EFGH têm a mesma medida e que seus ângulos internos são retos.

O entrevistado J1 utiliza a congruência de triângulos em sua justificativa e finaliza a demonstração com o símbolo de *“como queríamos demonstrar”*. Já J8 afirma que os lados de EFGH são diagonais dos quadrados AEOH, EBFO, OFCG, HOGD e faz a demonstração.

O integrante J2 tenta usar o teorema que afirma que um quadrilátero que tem lados opostos paralelos é um paralelogramo, mas depois parece ter percebido que o quadrilátero tinha lados congruentes pelo fato dos quadriláteros do item *c* serem congruentes (mesmo argumento de J8), mas não deixa isto claro. Apesar de saber que tem de demonstrar que os ângulos são todos retos, não demonstrou. O participante J5 justifica que os ângulos internos são retos, mas falta formalismo e algumas conclusões. Também tenta escrever sobre a congruência dos lados, mas lacunas o distanciam de uma demonstração.

O entrevistado J6 se preocupa em mostrar que os ângulos internos de EFGH medem  $90^\circ$ , mas não deixa claro em sua escrita que os lados de EFGH têm a mesma medida.

O participante J4 busca mostrar que o quadrilátero EFGH é um quadrado considerando que este está inscrito no quadrado ABCD e que seus lados são paralelos às diagonais de ABCD, depois escreve: *“caso contrário, [...] a aresta HE do quadrilátero não fosse paralela a diagonal AC, o ponto E (ou H) não seria ponto médio do segmento AB (ou AD) e conseqüentemente, não seria um quadrado”*. Observa-se que J4 se confunde em sua tentativa de demonstrar, nos levando a inferir que não compreende o que é uma demonstração.

Ainda com respeito aos registros escritos, o participante J7 afirma que os lados de EFGH têm a mesma medida e que seus ângulos internos são retos, sem justificativas. O integrante J3 escreve apenas que *“cada lado do quadrado EFGH é uma diagonal dos quadrados AEOH, EBFO, OFCG, HOGD”*, não apresentando a resposta de forma completa.

Na entrevista, antes de anotar as respostas, J3 diz que *“EFGH é um losango”*, se confunde, questiona se todo losango é um quadrado e sinaliza não saber como proceder para justificar, porém depois escreve: *“cada lado do quadrado EFGH é uma diagonal dos quadrados AEOH, EBFO, OFCG, HOGD”*. Em sua resposta oral, J6 justifica dizendo: *“é pela intuição”* e depois escreve uma justificativa sobre o fato de os ângulos internos serem retos. O participante J7 também justifica oralmente pela intuição e diz não saber demonstrar. Os demais entrevistados respondem como no registro escrito.

Observando os registros escritos das respostas dos integrantes do GI, pode-se notar que I1 escreve frases que aparentam não ter sentido e que não contribuem para a explicação.

Situação semelhante ocorre na explicação escrita por I5, que utiliza como argumento a demonstração do teorema de Pitágoras, mas não deixa claro sua efetividade. Esse participante também escreve que os ângulos internos do quadrilátero EFGH são retos e que as diagonais neste quadrilátero o dividem em dois triângulos retângulo.

O entrevistado I2 entende que se o quadrilátero EFGH tiver uma representação com um dos lados na horizontal, será um quadrado, pois escreve: *“Sim, se eu rotacionar a imagem”*. O participante I3 escreve que, pelo quadrilátero EFGH estar *“inserido”* (inscrito) no quadrado maior (ABCD) e seus *“cantos”* (vértices) estarem na metade dos lados do quadrado maior, então seus lados têm o mesmo tamanho, porém não explica o fato de os ângulos internos serem retos. O integrante I4 diz que EFGH é um quadrado pois, por hipótese, ABCD também o é, e o segmento HE é diagonal do quadrado AEOH assim como os demais lados são diagonais dos quadrados EBFO, OFCG e HOGD, mas não deixa claro as implicações dessas afirmações na explicação.

Os registros escritos dos participantes I6 e I8 descrevem um raciocínio em que buscam mostrar que EFGH é um quadrado. Ambos têm como premissa que os lados do quadrilátero EFGH são diagonais dos quadrados AEOH, EBFO, OFCG e HOGD. O participante I6 escreve: *“como os quadrados são iguais (AEOH, EBFO, OFCG, HOGD), as arestas têm mesma medida”*, escreve também que *“as diagonais dividem o quadrado ao meio, também dividem o ângulo de 90° em duas partes iguais, ou seja, 45°”* e conclui que os ângulos internos do quadrilátero em questão medem 90°. O entrevistado I8, a partir da premissa, conclui de forma direta que os lados do quadrilátero têm a mesma medida e seus ângulos internos medem 90°. Em sua resposta, I7 escreve que os lados de EFGH são, dois a dois, paralelos e também dois a dois ortogonais, mas não explica como chegou a essas conclusões.

Em suma, os registros escritos da maioria dos integrantes do GI não contribuem para a explicação e/ou não são claros. Apenas os registros escritos de I6 e I8 explicitam um raciocínio coerente para a explicação, porém não apresentam formalismo matemático.

Analisando as respostas dadas oralmente durante a entrevista, pôde-se notar que os integrantes I4, I6 e I8 tiveram dificuldade em descrever por escrito seus raciocínios, porém buscaram explicar por meio de um raciocínio coerente. Os três tiveram como premissa o fato de os lados de EFGH serem diagonais dos quadrados AEOH, EBFO, OFCG e HOGD. Ao ser questionado, I4 relata, a partir da premissa, que as diagonais dividem o quadrado em duas partes iguais (triângulos) e diz (de modo informal, mas equivalente) que, juntando os quatro triângulos (EOH, EFO, FOG e HOG), temos o quadrado em questão. Em sua fala, I6 diz que o quadrilátero EFGH está *“rotacionado”*, que *“seus lados são iguais e seus ângulos são de 90°”* e depois explica a partir da premissa que as diagonais dividem os ângulos em partes iguais, cada uma de 45° o que, segundo I6, garante que os ângulos internos são retos. Em sua fala, I8 parte da premissa e, assim como I6, explica a divisão dos ângulos retos pelas diagonais em dois medindo 45° cada e conclui dizendo que os lados têm a mesma medida pois as diagonais são *“equivalentes”*.

Oralmente, I1 diz que seu registro escrito é mais intuitivo e que não saberia como explicar. Os participantes I5 e I7 também não conseguem explicar por que EFGH é um quadrado. As respostas orais de I2 e I3 são coerentes com suas escritas. Pode-se observar que as respostas dadas por I2 e I4 são explicações pautadas puramente em argumentos geométricos.

Desse modo, pode-se observar que um número maior de integrantes do GJ - comparado aos do GI- tem melhor desempenho nesse item. Dois integrantes do GJ

apresentaram respostas pelas quais se pode inferir que houve a mobilização da função heurística, da mobilização de habilidades como a de percepção de figura-fundo, discriminação visual, percepção de relações espaciais, conservação da percepção e percepção de relações espaciais. Observa-se também nestas respostas a coordenação das funções heurística e discursiva, e a de interpretação da figura dada. Nestas respostas é possível identificar que dois dos participantes do GJ realizaram raciocínios lógicos formais e compreendem a estrutura axiomática da matemática nesta tarefa, visto que as respostas apresentadas são matematicamente aceitáveis.

Para outros três integrantes do GJ, se pode inferir que houve a mobilização da função heurística, de habilidades como a de percepção de figura-fundo, a discriminação visual, a percepção de relações espaciais, a conservação da percepção e a percepção de relações espaciais. Porém, suas respostas dão indícios de que tiveram dificuldade em relação ao encadeamento das ideias na estrutura da demonstração, mostrando que a coordenação das funções heurística, discursiva e a de interpretação da figura dada podem ter sido inefetivas no raciocínio aplicado, visto que as respostas apresentadas por eles não são as esperadas.

Os demais integrantes do GJ (J3, J4 e J7), assim como todos os participantes do GI, não deixam claro o conhecimento sobre como seria uma demonstração. As respostas destes participantes dão indícios de que eles percebem os objetos de maneira informal, mediante o reconhecimento de suas componentes e propriedades. Pela falta de argumentos nas respostas, nesses casos, não foi possível a identificação dos elementos que compõem a visualização geométrica como a definimos neste trabalho.

## 5 Análise dos resultados

Como foi apresentado anteriormente, a análise das produções escritas e orais dos entrevistados ao responder a tarefa foi organizada em três blocos. Pelo exposto, podemos inferir em relação a cada bloco:

**Bloco 1:** Relativo à análise cognitiva pela verificação da mobilização e a coordenação dos quatro elementos que compõem a visualização segundo Gutiérrez (1996a) quanto a:

- a) Produção de imagem mental: foram notados indícios de produção de imagens mentais pelos integrantes dos dois grupos, o que é evidenciado pelas justificativas dos entrevistados em cada item, pois estas indicaram a ocorrência de aspectos do processo de visualização. Essa inferência se baseia em Gutiérrez (1996a), para o qual imagens mentais são os objetos criados, usados e transformados na atividade de visualização;
- b) além disso, a ação de girar a folha contendo o enunciado e o uso dos termos “*quadrado rotacionado*” e “*quadrado inclinado*” por parte de alguns dos entrevistados são indícios de que eles têm uma imagem mental do conceito de quadrado. Sendo que para esses participantes, em particular, essa representação mental de quadrado é um tanto limitada do ponto de vista matemático, por não representar o conceito de modo global;
- c) a ideia de imagem do conceito é abordada por Gutiérrez (1996b). Segundo o autor, quando lemos ou ouvimos o nome de um conceito conhecido, nossa memória é estimulada e evoca algo, que raramente é a definição do conceito, mas sim um conjunto de representações visuais, imagens, impressões ou experiências. Esse entendimento corrobora com o observado;

- d) utilização de representações externa: se observa que em todos os itens da tarefa os integrantes dos dois grupos utilizam a figura dada no enunciado para justificar suas respostas, o que evidencia a utilização de representações externas na resolução desta tarefa;
- e) mobilização de ações de interpretação de informação: é possível notar que nesta tarefa os entrevistados mostram, principalmente, indícios de uso de uma das ações de interpretação, a interpretação a partir da figura. De acordo com Gutiérrez (1992), a interpretação de informações obtidas a partir de figuras é um processo de leitura, compreensão e interpretação das representações usadas em matemática para extrair as informações contidas nessas. Pode-se observar que todos os integrantes do GJ e cinco do GI, no item *a*, apresentaram resposta matematicamente aceitável em relação ao número de quadrados, evidenciando a ativação da ação de interpretação de informação. No item *b*, ambas as turmas tiveram resultados próximos, os participantes demonstram ter noção dos conceitos de diagonal e segmentos paralelo e os reconhecem na figura. É possível notar que eles interpretam as informações obtidas a partir de imagens dada, evidenciando a realização da ação de interpretação da figura extraíndo os conceitos evocados. No item *c* foi observado que em ambos os grupos houve a identificação de características comuns aos quadriláteros AEOH, EBFO, OFCG e HOGD, evidenciando a ação de interpretação da figura. No item *d* podemos observar integrantes do GJ com melhor desempenho. Dois integrantes do GJ apresentaram respostas pelas quais se pode inferir que houve a interpretação da figura dada. Os demais integrantes do GJ (J3, J4 e J7), assim como todos os participantes do GI, não deixam claro o conhecimento sobre o seria uma demonstração. Nesses casos, não foi possível a identificação dos elementos que compõem a visualização geométrica, em particular a ação de interpretação da figura. Desse modo, há indícios do uso da ação de interpretação, porém observa-se que esta ainda precisa ser melhor trabalhada em relação aos dois grupos, principalmente no grupo I;
- f) mobilização das habilidades para a visualização: observou-se nas respostas dos entrevistados a esta tarefa que a mobilização das habilidades para a visualização esperadas, de modo geral, ocorreu. De fato, no item *a* os entrevistados mobilizaram a percepção figura-fundo e da discriminação visual, já que a contagem dos quadrados passa pelo reconhecimento das formas, a identificação das subfiguras por justaposição ou superposição e a comparação entre essas subfiguras. Todos os integrantes do GJ e cinco do GI apresentaram resposta matematicamente aceitável em relação ao número de quadrados. Três integrantes do GI apresentaram indícios de dificuldade na mobilização dessas habilidades por reconhecerem seis dos dez quadrados existentes na configuração. No item *b* é possível notar, em ambos os grupos, que eles mobilizaram a habilidade de percepção de relações espaciais ao relacionarem os quadrados entre si, as diagonais e os segmentos paralelos a elas. No item *c*, notou-se a utilização das habilidades de conservação da percepção e percepção de relações espaciais, pois os entrevistados dos dois grupos reconheceram que propriedades do quadrado são independentes de tamanho ou posição, relacionaram os quadrados entre si e compararam outros elementos que compõem a figura, como ângulos, lados e vértices. Embora a rotação mental não tenha sido uma habilidade considerada necessária na estrutura estabelecida para a análise desta tarefa, se observou nas respostas ao item *a* que três integrantes do GJ, ao girarem a folha de tarefa para ver

os quadrados com lados opostos na horizontal, dão indícios de que a mobilização da rotação mental pode ser falha para eles.

**Bloco 2:** Relativo à análise cognitiva pelo emprego das funções heurística, de suporte e discursiva e também a coordenação entre elas, levando às conversões de registros de representação semióticos segundo Duval (2015) foi observado quanto a:

- a) Utilização da função heurística: pode-se observar evidências do uso da função heurística, assim como da mobilização das habilidades para visualização nas produções dos entrevistados dos dois grupos. Segundo Duval (2015), a função heurística tem a ver com tratamentos dentro do registro figural, que parte da apreensão perceptiva e é um instrumento da apreensão operatória. Está ligada à exploração visual das figuras para resolver problemas de reconhecimento de formas, possíveis modificações, como sobreposição, desconstrução dimensional etc. No item *a*, houve o reconhecimento das formas, a identificação das subfiguras por justaposição ou superposição e a comparação entre essas subfiguras. No item *b*, pôde-se notar que, ao relacionar os quadrados entre si, as diagonais e os segmentos paralelos a elas, os participantes de ambos os grupos utilizaram a função em questão. No item *c*, a comparação entre os quadriláteros e outros elementos que compõem a figura, como ângulos, lados e vértices dão indícios do uso da função. No item *d* é possível identificar o uso da função nas respostas de cinco integrantes do GJ, já em outros três entrevistados do GJ e todos do GI não foi possível a identificação do uso da função pela dificuldade expressa nas produções dos entrevistados em responder o item, o que nos leva a inferir que possam haver dificuldades no uso da função heurística;
- b) utilização da função de suporte: Essa função, segundo Duval (2015), está ligada a medições e cálculos, o que não foi observado nas produções escrita e oral dos entrevistados ao responderem a tarefa proposta;
- c) utilização da função discursiva: notou-se maior dificuldade por parte dos participantes da pesquisa no emprego dessa função, principalmente no que diz respeito à apresentação de justificativas matematicamente coerentes e a realização de demonstrações. Com respeito ao conceito de quadrado, apesar de seis dos integrantes do GJ terem uma ideia do conceito de quadrado matematicamente aceitável, cinco dos oito integrantes do GJ e todos do GI apresentam dificuldade relacionada aos termos ligados à linguagem. Com respeito aos itens *b*, *c* e *d*, também se observou que os integrantes do GI apresentaram maior dificuldade na apresentação das justificativas. No item *d*, pôde-se identificar o uso da função discursiva nas respostas de cinco integrantes do GJ, os outros três apresentaram respostas incompletas. Já em outros três entrevistados do GJ e todos do GI não foi possível a identificação do uso da função pela dificuldade expressa nas produções dos entrevistados em responder o item, o que nos leva a inferir que possa haver dificuldades no uso da função discursiva por parte deles. Assim, o emprego da função discursiva precisa ser melhor trabalhado nos integrantes dos dois grupos, mas principalmente nos integrantes do GI;
- d) realização de conversões: esta categoria está intimamente relacionada às três anteriores já que, segundo Duval (2015), a coordenação das três operações subjacentes à visualização levam às conversões entre registros de representação semióticos e proporcionam a conexão entre as apreensões operatória e discursiva. Pelo exposto, com respeito às categorias anteriores, é possível notar que os

entrevistados apresentam dificuldades na passagem do registro figural para a língua natural (oral ou escrita), principalmente ligadas à formalização matemática, as justificativas e as demonstrações. As dificuldades são vistas nos integrantes dos dois grupos, mas mais acentuadas no GI. O fato de os registros figural e língua natural serem multifuncionais, segundo Duval (2008), pode levar a maiores dificuldades, principalmente pelo fato de os tratamentos envolvidos não serem algoritmizáveis, o que evidencia a necessidade em se trabalhar esses registros, seus tratamentos e as conversões entre eles com os estudantes do curso de licenciatura.

**Bloco 3:** Relativo à análise Matemática, em conformidade com Duval (2008), em que se verificará se as justificativas e respostas são matematicamente aceitáveis ou não. Foi observado quanto a:

- a) Respostas matematicamente aceitáveis: foram consideradas nessa categoria as respostas em que os conceitos e resultados matemáticos foram empregados corretamente e que seguem uma estrutura formal em relação à Matemática. Desse modo, em relação ao conceito de quadrado apenas um integrante do GJ forneceu uma resposta nesta categoria. No item *a*, todos os entrevistados do GJ e cinco do GI apresentaram respostas matematicamente aceitáveis (reconheceram os dez quadrados). No item *b*, seis integrantes do GJ e sete do GI forneceram respostas matematicamente aceitáveis, embora possamos inferir que todos tenham noção dos conceitos evocados e da resposta. No item *c*, três participantes do GJ apresentaram a relação de congruência em suas respostas, que era o esperado. No item *d*, dois entrevistados do GJ apresentaram uma resposta matematicamente aceitável, ou seja, considerando a tarefa como um todo, observa-se um melhor desempenho do GJ nas respostas, porém ainda há muito a ser melhorado.
- b) respostas matematicamente não-aceitáveis: foram consideradas nessa categoria as respostas em que foram identificadas dificuldades no uso de simbologia, conceitos e resultados matemáticos e que não apresentam uma estrutura formal em relação à Matemática. Desse modo, em relação ao conceito de quadrado, sete integrantes do GJ forneceram respostas nesta categoria. No item *a*, três dos entrevistados do GI não reconheceram todos os quadrados da configuração dada. No item *b*, dois integrantes do GJ e um do GI forneceram respostas em que se identificou dificuldades no uso de termos e simbologia matematicamente aceitáveis, embora tenham dado indícios de compreensão dos conceitos evocados e da resposta. No item *c*, cinco participantes do GJ e todos do GI apresentaram várias características comuns aos quadriláteros citados no enunciado, porém não fazem menção à relação de congruência. No item *d*, cinco entrevistados do GJ e todos do GI apresentaram uma resposta matematicamente não-aceitável. Sendo assim, como já dito na discussão da categoria anterior, considerando a tarefa como um todo, observa-se um melhor desempenho do GJ nas respostas, porém ainda há muito que melhorar, principalmente considerando que os integrantes deste grupo já concluíram as disciplinas de Geometria do curso de licenciatura.

## 6 Considerações finais

Como já exposto, diversas pesquisas enfatizam a visualização como um fator de grande importância para o ensino e a aprendizagem da Matemática, em particular da Geometria. Entendemos a visualização como uma ferramenta a mais, que pode auxiliar no ensino de

Geometria, afirmar sua relevância investigativa e promovê-la para que se torne parte do repertório dos futuros professores no exercício da docência.

Neste estudo de caso, buscamos analisar o conhecimento sobre conceitos de Geometria evocados na tarefa aplicada (quadrado, segmentos paralelos, diagonais) e o uso da visualização na resolução das tarefas, observando a existência ou não de diferenças entre os dois casos estudados (GI e GJ).

Buscou-se com essa investigação levantar dados que pudessem contribuir para respostas às questões que emergiram durante as leituras que embasaram este trabalho.

Com respeito ao objetivo de investigar a atividade de visualização na resolução de tarefas de Geometria, em especial a mobilização de imagens mentais, das ações de interpretação de informações e das habilidades mobilizadas para visualização, bem como a coordenação entre as funções heurística e discursiva, observou-se que os elementos e operações que compõe a visualização, segundo o conceito empregado nessa pesquisa, ocorrem de modo geral nos dois grupos. Porém, foi possível notar nas resoluções da tarefa utilizada neste trabalho algumas dificuldades em relação à interpretação da informação, e principalmente no uso da função discursiva, que leva à dificuldade na realização da conversão entre os registros figural e língua natural.

Foi observado, também, que há uma diferença entre os dois grupos estudados. De modo geral, os integrantes do GI apresentam maiores dificuldades. Foram identificadas dificuldades em relação ao conceito de quadrado, o que nos leva a inferir que eles tenham uma “imagem do conceito”, ou seja, uma representação não fiel do ponto de vista matemático ao conceito em si.

Neste estudo, infere-se que há uma diferença, ainda que pequena, entre o grupo dos ingressantes e o daqueles que já cursaram as disciplinas de Geometria do curso de Matemática. Os participantes que já cursaram as disciplinas de Geometria tiveram um melhor desempenho em suas respostas se comparado ao grupo dos ingressantes, o que corrobora com o observado em Corradi et al. (2019b).

O desempenho, principalmente dos integrantes do GI, nos leva também a refletir se a falta de conhecimento teórico sobre o conceito de quadrado prejudicou na resolução da tarefa e até mesmo na mobilização e uso dos elementos que compõem a visualização, como concluiu Corradi e Franco (2019a).

Pretende-se dar continuidade a pesquisas que buscam realizar uma análise minuciosa da aplicação da visualização em um número maior de tarefas e propor possíveis contribuições do estudo para o ensino superior.

## Referências

BISHOP, Alan J. Spatial abilities and mathematical thinking. *In*: ZWENG, M. et al.(eds.). **Proceedings of the IV ICME**. Birkhäuser: Boston, USA, 1983. p. 176-178.

BURATTO, Ivone C. **Historicidade e visualidade**: proposta para uma nova narrativa na educação matemática. Orientador: Cláudia Regina Flores. 2012. 241 f. Tese (Doutorado em Educação Científica e Tecnológica) - Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, SC, 2012. Disponível em: <https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/101029>. Acesso em: 11 mar. 2018.

CORRADI, Raquel P.; FRANCO, Valdeni S. Conceitos básicos em Geometria e as habilidades de visualização: antes e depois da licenciatura em Matemática. **Educação Matemática em Revista – RS**,

v.1, n. 20, p.36- 52, 2019a. Disponível em: <http://www.sbem.com.br/revista/index.php/EMR-RS/article/view/1885/1377> . Acesso em: 18 mai. 2020

CORRADI, Raquel P. et al. Habilidade de visualização: um comparativo por meio da resolução de tarefas, com foco na rotação. **XV CIAEM-IACME**, Medellín, Colombia, 2019b. Disponível em: <http://conferencia.ciaem-redumate.org/index.php/xvciaem/xv/paper/viewFile/187/360> . Acesso em: 18 mai. 2020.

DUVAL, Ramond. Representation, vision and visualization: cognitive function in mathematical thinking. Basic issues for learning. *In*: HITT, F.; SANTOS, M. (ed.). **Proceeding of the 21st Annual Meeting of the 228North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education**, Mexico, oct. 1999b. p. 3-26.

DUVAL, Ramond. Registros de Representações Semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em Matemática. *In*: MACHADO, S. D. A. (org.). **Aprendizagem em matemática: registros de representação semiótica**. 4. ed., Campinas, São Paulo: Papyrus, 2008. p. 11-33.

DUVAL, Ramond. **Ver e ensinar a matemática de outra forma: entrar no modo matemático de pensar: os registros de representação semióticas**. Org.: Tânia M. M. Campos. Tradução: Marlene Alves Dias. São Paulo: PROEM, 2011.

DUVAL, Ramond. Abordagem cognitiva de problemas de geometria em termos de congruência. Trad. Mércles Thadeu Moretti. **Revista Eletrônica de Educação Matemática**, Florianópolis, v. 07, n. 1, p.118-138, 2012b.

DUVAL, Ramond. Figures et visualisation géométrique: «voir» en géométrie. *In*: BAILLÉ, J.; LIMA, J. (ed.). **Du mot au concept. Figure**. Grenoble: Presses Universitaires, 2015. p. 147-182.

FERNÁNDEZ BLANCO, Tereza. **Una aproximación ontosemiótica a la visualización y el razonamiento espacial**. Orientador: José Antonio Cajaraville Pegito; Juan Díaz Godino. 2011. 465 f. Tesis doctoral. Santiago de Compostela. Universidad de Santiago de Compostela, Espanha, 2011. Disponível em: [https://www.ugr.es/~jgodino/Tesis\\_doctorales/Teresa\\_Fernandez\\_tesis.pdf](https://www.ugr.es/~jgodino/Tesis_doctorales/Teresa_Fernandez_tesis.pdf). Acesso em: 04 out. 2017.

FERNÁNDEZ BLANCO, Tereza. La investigación en visualización y razonamiento espacial. Pasado, presente y futuro. *In*: BERCIANO ALCARAZ, A.; GUTIÉRREZ PEREDA; ESTEPA CASTRO, A.; CLIMENT RODRÍGUEZ, N. (eds.). **Investigación en Educación Matemática XVII**. Espanha, Bilbao: SEIEM 2013, 2013. p. 19-42. Disponível em: <https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=5063587> . Acesso em: 04 out. 2017.

FERNÁNDEZ BLANCO, Tereza. Atendiendo habilidades de visualización en la Enseñanza de la geometría. Universidad de Santiago de Compostela. **IX Festival Internacional de Matemática**, Quepos, Puntarenas, Costa Rica, 12 a 14 de jun., 2014. p. 21 – 33. Disponível em: <http://revistas.tec.ac.cr/index.php/memorias/article/view/2505/2293> . Acesso em: 13/03/2018.

GODINO, Juan. D. et al. Una aproximación ontosemiótica a la visualización en educación matemática. **Enseñanza de las Ciencias**, [S. l.], v. 30, n. 2, p. 109-130, 2012. Disponível em: <https://core.ac.uk/download/pdf/13319844.pdf>. Acesso em: 27 abr. 2019.

---

GUTIÉRREZ, Ángel. Procesos y habilidades en visualización espacial. In: **Memorias del 3er Congreso Internac. sobre Investig. en Educ. Mat. (Valencia, 1991)**, Universidad de Valencia. Valencia. 1992. Disponível em: <https://www.uv.es/Angel.Gutierrez/marcotex.html>. Acesso em: 11 dez. 2017.

GUTIÉRREZ, Ángel. **Visualization in 3-Dimensional Geometry**: in search of a framework. University of Valence, Spain, 1996a. Disponível em: <https://www.uv.es/Angel.Gutierrez/marcotex.html>. Acesso em: 11 dez. 2017.

GUTIÉRREZ, Ángel. The aspect of polyhedra as a factor influencing the students' ability for rotating them. **New directions in geometry education**, Brisbane, Austrália, p. 23-32, 1996b. Disponível em: <https://www.uv.es/Angel.Gutierrez/marcotex.html>. Acesso em: 11 dez. 2017.

KAWAMOTO, Mariko. **Habilidades de visualização em Geometria espacial**: um diagnóstico com alunos de 3º ano do Ensino Médio. Orientador: Vera Helena Giusti de Souza. 2016. 180 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Coordenadoria de Pós-Graduação – Universidade Anhanguera de São Paulo, São Paulo, 2016. Disponível em: [https://sucupira.capes.gov.br/sucupira/public/consultas/coleta/trabalhoConclusao/viewTrabalhoConclusao.jsf?popup=true&id\\_trabalho=3824010](https://sucupira.capes.gov.br/sucupira/public/consultas/coleta/trabalhoConclusao/viewTrabalhoConclusao.jsf?popup=true&id_trabalho=3824010). Acesso em: 01 dez. 2017.

PONTE, João P. Gestão curricular em Matemática. In: GTI (Ed.), **O professor e o desenvolvimento curricular**. Lisboa: APM, 2005. p. 11-34. Disponível em: [https://www.researchgate.net/publication/242643133\\_Gestao\\_curricular\\_em\\_Matematica](https://www.researchgate.net/publication/242643133_Gestao_curricular_em_Matematica). Acesso em: 29 abr. 2019.

SANTOS, Alessandra H. **Um Estudo Epistemológico da Visualização Matemática**: o acesso ao conhecimento matemático no ensino por intermédio dos processos de visualização. Orientador: José Carlos Cifuentes. 2014. 97 f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e em Matemática) - Universidade Federal do Paraná, Curitiba - PR, 2014. Disponível em: [http://www.exatas.ufpr.br/portal/ppgecm/wp-content/uploads/sites/27/2016/03/045\\_AlessandraHendidosSantos.pdf](http://www.exatas.ufpr.br/portal/ppgecm/wp-content/uploads/sites/27/2016/03/045_AlessandraHendidosSantos.pdf). Acesso em: 01 dez. 2017.

YIN. Robert. K. **Estudo de caso**: planejamento e métodos. 3. ed. Porto Alegre: Bookman, 2005.