

## **Ressignificando o cálculo de áreas por um produto educacional**

(Re)meaning the calculation of areas by an educational product

Daniel de Jesus Silva\*

### **Resumo**

O produto educacional apresentado neste artigo teve origem numa pesquisa de mestrado profissional em Matemática (PROFMAT). Tem como objetivo instrumentalizar atividades investigativas no estudo do algoritmo da Integral Definida, por meio da história da matemática, na construção do conhecimento de cálculos de áreas de regiões planas irregulares. Para a elaboração deste trabalho, toma-se como base teórica estudo dos autores, Floriani (2000), Palis (2006), e outros pesquisadores do tema materiais concretos e manipuláveis, bem como D'Ambrosio (2004), Miguel e Miorim (2004), dentre outros, discutindo história da/na educação matemática. Entende-se que, o Produto Educacional "Ressignificação o cálculo de áreas" como recurso didático dá suporte à aprendizagem do algoritmo para calcular áreas de regiões irregulares, permitindo que os alunos criem espaços para refletirem sobre os conteúdos matemáticos estudados, a partir de atividades investigativas, via história da matemática, tornando o estudo do cálculo mais prazeroso, instigante, e o seu aprendizado mais efetivo.

**Palavras-chave:** Produto educacional. História da Matemática. Cálculo de área. Integral definida.

### **Abstract**

The educational product presented in this article originated in a research of a professional master's degree in Mathematics (PROFMAT). It aims to instrument research activities in the study of Integral Definida algorithm, through the history of mathematics in the construction of knowledge of calculations of areas of uneven flat regions. For the elaboration of this work, it is based on a theoretical study by Floriani (2000), Palis (2006), and other researchers on the subject concrete and manipulable materials, as well as D'Ambrosio (2004), Miguel e Miorim (2004), among others, discussing the history of / in mathematics education. It is understood that the Educational Product "Resigning Area Calculation" as a didactic resource supports the algorithm's learning to calculate areas of irregular regions, allowing the students to create spaces to reflect on the mathematical contents studied, from research activities via the history of mathematics, making the study of calculus more pleasurable, stimulating, and more effective learning.

**Keywords:** Educational product. History of Mathematics. Area calculation. Integral defined.

---

\* Mestre profissional em Matemática, professor, Universidade do Estado da Bahia-UNEB, [danielinbcte@hotmail.com](mailto:danielinbcte@hotmail.com)

## **1 Introdução**

Considerando que a aprendizagem é constituída pelo processo interativo, para proporcionar uma melhor compreensão dos enunciados de problematizações matemáticas, bem como do meio social e do mundo, é importante que o professor esteja munido de estratégias que possibilitem o desenvolvimento de seus alunos enquanto sujeitos ativos, interativos e construtores de conhecimento. Assim, os alunos precisam ser motivados a produzir conhecimento e não apenas a reproduzir conhecimento previamente preparado. Escutar, copiar, decorar, fazer exercícios mecânicos, fazer provas; tem sido a rotina da grande maioria dos alunos na educação básica, e também continua nas universidades, o que resulta na formação de profissionais com dificuldades de responder aos desafios postos pela sociedade.

Nesse sentido Moreira e David (2007, p. 101) aponta que, “o processo de formação na licenciatura em Matemática pode se articular com a prática docente escolar de diferentes formas e em diversos sentidos”. E a formação continuada dos professores é de fundamental importância para consolidá-los como profissionais da área. Nesse sentido, os mestrados profissionais nas áreas de educação e ensino têm ganhado destaque nos últimos anos.

De acordo com a Capes o Mestrado Profissional é uma modalidade de Pós-Graduação *stricto sensu* voltada para a capacitação de profissionais, nas diversas áreas do conhecimento, mediante o estudo de técnicas, processos, ou temáticas que atendam a alguma demanda do mercado de trabalho. O trabalho de conclusão do curso deve ser sempre vinculado a problemas reais da área de atuação do profissional e de acordo com a natureza da área e a finalidade do curso, podendo ser apresentado em diversos formatos. Neste sentido, no que tange à área de ensino e aprendizagem, tem-se gerado variados Produtos Educacionais.

Ao cursar no Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) a disciplina Tópicos em História da Matemática, podemos refletir sobre as ricas possibilidades metodológicas apresentadas que despertaram o

interesse em desenvolver uma pesquisa que visa colaborar com a formação dos professores de matemática, para que estes também possam refletir sobre suas práticas pedagógicas, a partir da utilização da História da Matemática em Atividades Investigativas, em especial, no processo de ensino do cálculo de áreas regulares e irregulares, sendo também uma preparação para o ensino de Cálculo Integral.

Nesta perspectiva, foi realizada uma pesquisa que envolve o uso da História de Matemática em Atividades Investigativas, direcionada pela seguinte pergunta diretriz: Como o uso da História da Matemática em Atividades Investigativas pode contribuir para a construção do conhecimento de cálculo de áreas no ensino básico e superior?

Neste trabalho apresentamos os resultados da construção e aplicação de um Produto Educacional, utilizado como recurso no desenvolvimento da história da matemática em atividades investigativas, para a construção do conhecimento de cálculo de áreas de regiões planas irregulares.

## **2 Material concreto manipulável: suporte enriquecedor em aulas investigativas**

O ideal é que o uso de material concreto nas propostas didáticas da matemática seja comum, em qualquer nível de ensino. No entanto, existe certa nebulosidade entre princípios teóricos (psicologia sensorial-empirista, psicologia genética, recursos didáticos, etc) e a prática no uso do material concreto que auxilia o processo de ensino-aprendizagem. Segundo Floriani (2000),

Um professor cujo ensino está ancorado nos princípios da Psicologia Sensorial-Empirista, utilizará os materiais concretos para formar imagens na mente dos alunos. Outro, cujo ensino se apoia nos postulados da Psicologia Genética, utilizará os mesmos materiais para ajudar seus alunos na construção dos conceitos. (FLORIANI, 2000, p.15).

Para esse autor, professores tradicionais poderão não gostar de metodologia apoiada no uso de materiais concretos, pois exige clima de liberdade

na sala de aula, construção dos conceitos matemáticos e valorização da autonomia moral, intelectual e social do educando. Não se trata assim de utilizar materiais concretos com simples finalidade à aquisição de “conteúdos”. (FLORIANI, 2000).

No âmbito do ensino e aprendizagem da matemática o trabalho didático volta-se para criação de ações, através das quais o aluno interage com o conhecimento. De acordo com Pais (2006),

O método e as estratégias de ensino têm a função de contribuir para que o aluno possa fazer Matemática no contexto escolar, sob a coordenação do professor; é uma das finalidades mais expressivas da educação matemática. Para fazer isso, é preciso buscar dinâmicas apropriadas para intensificar as possibilidades de interação do aluno com o conhecimento. A ênfase dessa ideia é dada à valorização das ações do aluno, porque envolve conceitos, proposições, problemas e afasta a concepção de que o saber matemático está preelaborado e pode ser transmitido para o aluno. (PAIS, 2006, p.28).

A utilização de material concreto manipulável é um rico recurso para o aluno fazer matemática em sala de aula, além de dinamizar e incentivar o interesse, proporciona prazer em aprender.

Segundo Baroni, Teixeira e Nobre (2009), as dificuldades inerentes à utilização de fontes históricas podem ser minimizadas nos casos em que se pode lançar mão de recursos não convencionais, tais como programas computacionais, sites, dramatização, dentre outros. Esses recursos, quando disponíveis, podem oferecer oportunidades de melhorar ou mesmo de que aconteçam experiências educacionais importantes.

Em particular, nas investigações no ensino de geometria, o uso de material concreto alcança toda a potencialidade. Assim, Ponte, Brocardo e Oliveira (2005) enfatizam:

As tendências curriculares convergem ao considerar que essa área da matemática é fundamental para compreender o espaço em que nos movemos e para perceber aspectos essenciais da atividade matemática. Salienta-se, por exemplo, a importância de estudar os conceitos e objetos geométricos do ponto de vista experimental e indutivo, de explorar a aplicação da Geometria a situações da vida real e de utilizar diagramas de modelos concretos na construção conceptual em Geometria. (PONTE; BROCARD; OLIVEIRA, 2005, p. 82- 83).

A utilização do material concreto oferece aos professores um ambiente propício para a construção do conhecimento matemático a partir de situações concretas, estimulando os alunos à descoberta, além de ser uma fonte de motivação. Porém, Mendes, Filho e Pires (2011) alertam:

O professor deve ter atenção e cuidado ao organizar as atividades do dia a dia em sala de aula. A inclusão e o uso de materiais concretos, como elementos facilitadores do processo ensino-aprendizagem de Matemática deve fazer parte do ambiente permanente da sala de aula. (MENDES; FILHO; PIRES, 2011, p.7).

Para bons resultados o professor deve planejar, conhecer bem as possíveis manipulações do material concreto e ter bem definidos os objetivos a serem alcançados com sua utilização nas aulas de matemática.

### **3 Abordagem da pesquisa**

O desenvolvimento de atividades investigativas em sala de aula, utilizando a História de Matemática, em especial, o cálculo de áreas não regulares, intencionou contribuir para uma prática pedagógica inovadora. Assim, essa pesquisa é qualitativa, de caráter exploratório, sustentada na participação direta da situação de ensino e de aprendizagem, uma vez que ocorreu no ambiente natural da sala de aula, sob a orientação do autor desse trabalho.

D'Ambrósio (2004, p. 21) aponta que “a pesquisa qualitativa é o caminho para escapar da mesmice. Dá atenção às pessoas e às ideias, procura fazer sentido de discursos e narrativas que estariam silenciosas. E a análise dos resultados permitirá propor os próximos passos”.

Desta forma, ao discutir a formação e desenvolvimento profissional dos professores, o desenvolvimento de atividades reflexivas e investigativas sobre a prática de ensino de matemática nas escolas, Fiorentini e Lorenzato (2009) afirmam:

Podemos dizer que um estudo do professor pode ser considerando pesquisa quando este for um trabalho intencional, planejado e constituído em torno de um foco ou questão de seu trabalho escolar, for metódico (passe por algum processo de produção/organização e análise escrita de informações) e

apresente um relatório final do estudo desenvolvido (texto escrito ou relato oral). (FIORENTINI; LORENZARO, 2009, p.75).

Diante do que foi mencionado, a pesquisa foi realizada tendo por base uma revisão bibliográfica sobre a História da Matemática e a Investigação Matemática, tomando algumas situações, em especial sobre o desenvolvimento da geometria e cálculo de áreas; a aplicação de sequência de atividades respaldadas em um Produto Educacional intitulado “Ressignificando o cálculo de áreas”, que visaram alcançar os objetivos que foram definidos.

O desenvolvimento da atividade proposta para Investigações via História da Matemática acerca do tema pesquisado ocorreu com a participação de 13 discentes da Universidade do Estado da Bahia (UNEB). Durante o período letivo 2015.1, esses discentes do quinto semestre do curso de Licenciatura em Matemática cursavam o componente curricular Cálculo II na época ministrada pelo autor desse trabalho.

A atividade “Ressignificando o cálculo de áreas” foi elaborada no intuito de perceber como a metodologia de aprendizagem por meio da História de Matemática em Atividades Investigativas, numa prática pedagógica inovadora, pode contribuir para a construção do conhecimento de cálculo de áreas. Essa atividade teve suporte de um material concreto manipulável de baixo custo, como cartolina, régua, tinta para papel, papel transparente, dentre outros.

Atuar no contexto da pesquisa como docente, e como participante da investigação, foi de grande importância para o desenvolvimento do estudo proposto, pois convergiu à ideia de Silveira e Miola (2008) onde ao pesquisarem sobre a prática, os professores também constroem um corpo de conhecimento local, ou seja, relacionam a uma unidade - uma escola, um currículo, uma classe, um aluno, entre outros, que devem ser compartilhados para que todos tirem proveito.

Em relação à pesquisa dentro do próprio campo de atuação, Ponte (2002) ressalta:

São várias as razões pelas quais esta pesquisa pode ser importante. Ela contribui, antes de mais, para o esclarecimento e resolução dos problemas.

Além disso, proporciona o desenvolvimento profissional dos respectivos autores e ajuda a melhorar as organizações em que eles se inserem. Em certos casos, esta pesquisa pode ainda contribuir para o desenvolvimento da cultura profissional no respectivo campo da prática e até para o conhecimento da sociedade em geral. (PONTE, 2002, p.02).

Pode-se perceber que o ambiente de trabalho constitui um local adequado para a pesquisa qualitativa, pois existe proximidade com o sujeito, conhecendo de perto as inquietações que serão investigadas, para reflexões e soluções. Nesse sentido, Palis (2015) reforça que:

O professor pesquisador de sua própria prática alia investigação e ensino: em face de um problema didático, submete-o a exame crítico, resolve-o da melhor maneira possível e divulga sua solução. Esse trabalho beneficia o próprio professor e os alunos, gera conhecimento e desenvolve a cultura profissional da comunidade de referência. (PALIS, 2015, p.02).

Desse modo, a realização da pesquisa se apresentou como uma rica possibilidade de não apenas identificar e entender um problema didático, mas também de criar conhecimento e reflexões pessoais (profissionais) partindo das necessidades reais presentes no cenário de investigação.

#### **4 A construção do Produto Educacional “Ressignificando o cálculo de áreas”**

A construção do Produto Educacional para ser utilizado em sala de aula se deu de forma simples, fazendo uso de conhecimentos de funções e gráficos. Os materiais empregados foram cartolinas verdes, tinta guache azul, purpurina, papel transparência, régua e caneta. Também um texto (apostila) contendo resumo da História da Matemática, as contribuições de povos antigos para a sistematização do cálculo de áreas, para introduzir os trabalhos de modo a buscar uma contextualização mais próxima da realidade dos estudantes.

A atividade proposta “Ressignificando o cálculo de áreas” trata-se de calcular a área de um terreno situado às margens do rio Nilo que tinha o formato irregular, o qual seria representado pelo material construído.

Primeiro desenhou-se na cartolina (que representava o terreno) uma figura que representava um rio, e as linhas que formavam as margens do rio eram gráficos de funções, traçados por um sistema cartesiano “imaginário”.

Utilizando-se de um software, um sistema de eixos coordenados (eixo das abscissas e eixo das ordenadas) foram plotados e impressos num papel transparência, o qual sobreposto na cartolina permitiu-se visualizar as margens do rio como o gráfico traçado num plano cartesiano.

Toda área que representava o rio foi pintada com tinta azul e aplicado purpurina para dar um brilho, como que os raios do sol incidissem sobre as águas, para parecer mais real, conforme figuras 01 e 02 a seguir.



**Figura 01** – Produto Educacional: “Ressignificando o cálculo de áreas”

**Fonte:** Imagem obtida pelo autor



**Figura 02** - Material concreto suporte para Atividade Investigativa  
**Fonte:** Imagem obtida pelo autor

Conforme a figura 02, o papel transparência plotado o sistema cartesiano foi colocado sobre a cartolina que representa o terreno fictício. Na região do primeiro quadrante (intervalo  $[0; 10]$ ) o leito do rio representa uma curva e no segundo quadrante (intervalo de  $[-10; 0]$ ) o leito do Nilo é representado por outra curva, ambas sendo união de parábolas que se intersectam no ponto coordenado  $(0,1)$ .

Para introduzir a atividade “Ressignificando o cálculo de áreas” foi criado o texto intitulado *Panorama Histórico: sistematização e formalização do cálculo de áreas*. Esta atividade foi realizada em grupos de até quatro alunos e teve por objetivos, atrair e fazer o aluno se sentir personagem da história, além de promover a interação do aluno com os demais colegas.

## **5 Aplicação do Produto Educacional e a construção do conhecimento**

A atividade “Ressignificando o cálculo de áreas” foi desenvolvida nos horários das aulas de Cálculo II do curso de Matemática do *Campus VI/UNEB*, com a participação de 13 alunos que foram subdivididos em quatro grupos. A proposta foi realizada na aplicação de oficinas, no intuito de gerar um ambiente dinâmico e cooperativo, onde os participantes foram instigados a investigar, criar conjecturas, testar e validar (ou não) hipóteses, criar conceitos por meio de noções intuitivas e então formalizar definições.

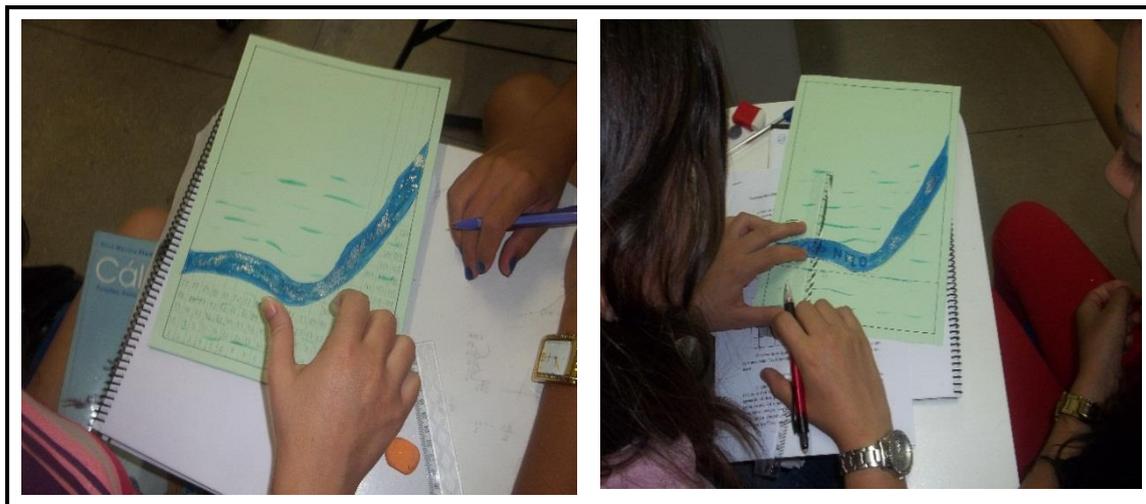
Segundo D’Ambrósio (1986), para definir uma estratégia para o trabalho em sala de aula devemos:

Considerar os elementos em jogo neste contexto, isto é, o professor na qualidade de agente de um processo e o aluno na qualidade de paciente do processo, isto é, o professor aquele que orienta a prática docente e o aluno aquele que se submete a essa prática orientada pelo professor. (D’AMBROSIO, 1986, p.44).

Assim sendo, as aulas foram planejadas para que os sujeitos pesquisados concebessem os conceitos e as definições de forma satisfatória. No decorrer da dinâmica foram realizados discussões com embasamentos matemático, com recorrência a conhecimentos outrora estudados.

Previamente os alunos foram orientados a pesquisarem sobre dois temas: o método da Exaustão e a soma de Riemann, pois conhecer tais assuntos seria fundamental para ações e discussões na atividade a ser realizada.

Após distribuir o texto para todos os alunos e proceder a leitura, foi explicado como se daria o desenvolvimento da atividade. A turma foi dividida em grupos de no máximo quatro alunos em que convencionou-se que cada 1 cm<sup>2</sup> na cartolina corresponderia a 1 unidade de área (u.a) do terreno fictício. Todas as cartolinas tinham o mesmo desenho e cada equipe calcularia a área sob o rio, sendo que cada grupo calcularia a área da melhor maneira que entendessem. A figura 03 ilustra o desenvolvimento da atividade.



**Figura 03:** Aplicação de Produto Educacional

**Fonte:** Imagem obtida pelo autor

Como já era esperado, os alunos passaram a fazer repartições da região em figuras geométricas regulares, mais conhecidas como quadrados, retângulos e triângulos, das quais sabiam calcular a área por meio de formas convencionais. Ao encostarem na borda do terreno (margem do rio), todos os grupos sentiram as mesmas dificuldades, houve muitas discussões de como realizar essa tarefa. Um grupo optou por traçar triângulos e os outros preferiram traçar quadrados de 1 x 1 cm e iam diminuindo a área de seus desenhos tentando englobar a área que pretendiam calcular e perceberam que era um trabalho exaustivo e concluíram que o melhor valor adquirido não poderia ser um valor exato, e sim, uma aproximação.

Neste momento, um objetivo na proposta foi atingido. As conclusões obtidas pelos grupos foram ponderadas e comparadas com as de matemáticos do quarto século a.C., que desenvolveram o método conhecido como método da exaustão. Os matemáticos gregos sabiam que:

Se de uma grandeza qualquer subtrairmos uma parte não menor que sua metade e do resto novamente subtrai-se não menor que a metade e se esse processo de subtração é continuado, finalmente restará uma grandeza menor que qualquer grandeza de mesma espécie. (BOYER, 1996, p.63).

As dificuldades encontradas na realização da atividade pelos pesquisados foram as mesmas que célebres matemáticos tiveram e as técnicas usadas pelos grupos também foram similares à de matemáticos como Arquimedes (287-212 a.C.). Conforme Boyer (1996), percebe-se que:

Matemáticos anteriores parecem ter sugerido que se tentasse inscrever e circunscrever figuras retilíneas dentro e por fora da figura curva, e ir multiplicando indefinidamente o número de lados; mas não sabiam como terminar o argumento, pois não conheciam o conceito de limite. Segundo Arquimedes, foi Eudoxo quem forneceu o lema que hoje tem o nome de Arquimedes, às vezes chamado axioma de Arquimedes e que serviu de base para o método de exaustão, o equivalente grego de cálculo integral. (BOYER, 1996, p.63).

Durante o desenvolvimento das atividades os alunos fizeram registro dos procedimentos adotados, das dificuldades encontradas, das conjecturas, observações, etc., para a elaboração do relatório estruturado do trabalho desenvolvido.

Após todos terem encontrado e registrado os valores para aquela área, foram entregues aos grupos papéis transparência plotado o sistema cartesiano e conforme a figura 02, houve discussão para determinar que tipo de curva estava ali representada. Após perceberem que eram parábolas, por interpolação polinomial determinaram as funções que aqueles gráficos representavam.

De maneira conveniente tomaram os pontos coordenados  $(-10,1)$ ,  $(-5,2)$  e  $(0,1)$ , também os pontos  $(0,1)$ ,  $(4,3)$  e  $(8,9)$ , facilmente visualizados no recurso que estava sendo manipulado e substituíram respectivamente nas equações genéricas  $g(x) = a_1x^2 + b_1x + c_1$  e  $h(x) = a_2x^2 + b_2x + c_2$ , montaram e resolveram dois sistemas de equações calculando os valores de  $a_1, b_1$  e  $c_1$ , bem como os de  $a_2, b_2$  e  $c_2$ . Após esses cálculos concluíram que do intervalo  $[-10, 0]$  o gráfico representava a função  $g(x) = -x^2/25 - 2x/5 + 1$  e que no intervalo  $[0,10]$  a função era  $h(x) = x^2/8 + 1$ , ou seja,

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{x^2}{25} - \frac{2}{5}x + 1 & \text{se } -10 \leq x \leq 0 \\ \frac{x^2}{8} + 1 & \text{se } 0 \leq x \leq 10 \end{cases}$$

Antes de encerrar a aula neste dia, os discentes foram orientados para usarem retângulos, para recalcularem a área sob o rio Nilo e observarem a diferença dos resultados sem a presença do mediador. Eles deveriam utilizar 10, 20 e 40 retângulos com base sobre o eixo dos  $x$  cuja altura seria determinada pela função do ponto médio, ou seja,  $f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right)$ .

Na aula seguinte as discussões foram retomadas para calcular a área proposta na atividade usando retângulos. Todos tinham feito a atividade proposta em casa usando lápis, papel, muita borracha e calculadora, o que serviu para que eles percebessem quão trabalhoso foi a empreitada enfrentada pelos matemáticos do passado por falta de tecnologia digitais. Para verificar a correção dos cálculos obtidos, Planilhas Eletrônicas foram utilizadas para os mesmos cálculos com 10, 20, 40 e 200 retângulos, ao tempo que proporcionou uma boa discussão sobre a importância do uso de tecnologia em sala de aula. Intuitivamente todos já haviam percebido que à medida que aumentava o número de retângulos o valor da área variava infinitamente.

Neste patamar, havia a consciência de que para otimizar os cálculos seria necessário inserir o conceito de limites, e, após discutirmos sobre a soma de Riemann, o trabalho das autoras Flemming e Gonçalves (1992) foram relevantes para a definição formal de Integral Definida para calcular área de regiões irregulares sob curvas delimitada por intervalos:

Desde os tempos mais antigos os matemáticos se preocupam com o problema de determinar a área de uma figura plana. O procedimento mais usado foi o método da exaustão, que consiste em aproximar a figura dada por meio de outras, cujas áreas são conhecidas. A integral definida está associada ao limite. Ela nasceu com a formalização matemática dos problemas de áreas... Temos a seguinte definição:

Seja  $f$  uma função definida no intervalo  $[a, b]$  e seja  $P$  uma partição qualquer de  $[a, b]$ . A integral definida de  $f$  de  $a$  até  $b$ , denotada por

$$\int_a^b f(x) dx, \text{ é dada por}$$
$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i$$

Desde que o limite do 2º membro exista. (FLEMMING; GONÇALVES, 1992, p.356).

Dessa forma, conceituamos a Integral Definida por meio de aplicação para cálculo de área sob curvas delimitadas por retas num intervalo fechado. Salientamos que esta definição também tem aplicação no campo da física, da economia, etc. onde ponderamos o contexto histórico paralelo de Isaac Newton e Leibniz como sistematizadores desse cálculo que evoluiu, com contribuições de outros personagens como Riemann (1826-1866) e Stieltjes (1856-1894).

Com o algoritmo da Integral Definida já rigorosamente definido, os alunos foram solicitados a calcularem a área da região sob a mesma curva do rio Nilo e compararem os resultados obtidos com os anteriores encontrados, em que os valores que os grupos encontraram se aproximaram do valor encontrado por meio da integral definida.

Muitos alunos ficaram entusiasmados com o resultado e dentre vários comentários positivos destaca-se: “*Conseguimos ver sentido naquele conteúdo.*”

Essa proposta apresentou um posicionamento explícito acerca de uma relação específica entre a História da Matemática e a Investigação Matemática por meio de um Produto Educacional. A preocupação em romper com a maneira tradicional de apresentação da integral, por meio de um método diferenciado foi a motivação para a realização e a compreensão da atividade. A proposta busca na História da Matemática e nos recursos empregados, elementos orientadores para a construção do conhecimento.

As ideias desse procedimento estão elencadas nas proposições de Clairaut (1892):

Pensei que esta ciência, como todas as outras, fora gradualmente formada; que verossimilmente alguma necessidade é que promovera seus primeiros passos não podiam estar fora do alcance dos principiantes, visto como por principiantes foram dados. Com essa ideia, propus-me remontar ao que podia

ser a fonte da geometria. Tratei de desenvolver-lhe os princípios por um método tão natural que pudesse ser tido como o próprio empregado pelos inventores; fugindo, entretanto, todas as falsas tentativas que eles naturalmente fizeram. A medida dos terrenos me pareceu mais própria para dar origem às primeiras proposições de geometria; e é efetivamente daí que provem esta ciência, pois que geometria significa medida de terreno. Pretendem alguns autores que os egípcios, vendo os limites de suas herdades continuamente destruídos pelas cheias do Nilo, lançaram os primeiros fundamentos da geometria, procurando os meios de se certificarem exatamente da situação, da superfície e da configuração de seus domínios. (CLAIRAUT, 1892, p. 9-10 apud MIGUEL; MIORIM, 2004, p.34).

A história pode ser uma fonte de busca de compreensão e de significados para o ensino-aprendizagem da Matemática escolar na atualidade. Meserve (1980, p. 398 apud MIGUEL; MIORIM, 2004, p. 45) reforça que “a história da matemática aparece como um elemento potencial para subsidiar a compreensão de certos tópicos matemáticos por parte do estudante, tópicos que lhe deveriam ser ensinados a partir de técnicas de resolução de problemas”. Ao tempo em que aparatos como Produtos Educacionais minimizam as dificuldades inerentes as fontes históricas e otimiza o envolvimento e concentração dos discentes nas atividades didáticas de sala de aula.

Desse modo, o Produto Educacional contribui beneficentemente no processo de ensino-aprendizagem da matemática.

Nota-se isso quando os participantes da pesquisa em 2015 foram questionados sobre a importância da utilização do material concreto nos resultados (aprendizagem) das atividades realizadas em sala de aula. Segue, nos excertos, a descrição de alguns alunos:

*- O material concreto utilizado foi uma potente ferramenta de apoio, que além de auxiliar o desenvolvimento das atividades, contribuiu para o entendimento do conteúdo. (Aluna).*

*- Utilizar o material concreto é de grande importância, pois torna a aula mais dinâmica e prazerosa desenvolvendo uma aprendizagem significativa, desprendendo da velha metodologia mecânica de colocar conteúdo no quadro e fazer uma prova, uma vez que o material concreto desenvolve curiosidade e gosto em querer investigar e conhecer realmente como e por que surgiu determinada coisa, utilizando assim as técnicas intelectuais. (Aluna).*

*- O material concreto oportuniza o aluno a ver o explicado, e a visualização ajuda na compreensão mais rápida. Tirando um pouco do discente a rotina com o quadro branco e o caderno, assim proporcionando uma aula diferenciada e que busque mais a atenção do aluno. É importante o uso dos materiais para que possamos buscar vários meios para compreensão, seja em livros, apostila, dentre outros, mas que nos desprendam de um único recurso de aprendizagem. (Aluno).*

Scheffer (2006) ressalta a importância de oportunizar aos professores e futuros professores a vivência com a experimentação de desafios, para “aguçar a sensibilidade para a compreensão dos aspectos que interferem no processo de construção dos conceitos e das relações geométricas vividas pelos alunos na sala de aula”. (SCHEFFER, 2006, p. 97).

Nas respostas apresentadas no questionário pelo grupo pesquisado desse trabalho, um comentário chama a atenção, sobre a necessidade do professor refletir sobre sua atuação durante o desenvolvimento de atividades propostas em sala de aula. Segue o relato de um dos alunos:

*- O material é suficiente. Acredito que tem que repensar é a relação estabelecida entre o professor e o aluno, a maneira como o professor transmite estes conteúdos tem que despertar o interesse do aluno. (Aluno).*

Outros comentários e observações diretas apontam que a metodologia utilizada no desenvolvimento da atividade “Ressignificando o cálculo de áreas” teve bom êxito em despertar o interesse da turma.

Após a primeira experiência geradora do Produto Educacional “Ressignificando o cálculo de áreas” como parte integrada da dissertação do mestrado profissional no ano de 2015, outras experiências, como um minicurso ministrado no XII Encontro Nacional de Educação Matemática em 2016 e em outras duas turmas de cálculo II no segundo semestre de 2016 e primeiro semestre de 2017, atestaram seu efeito instigante, interessante e a eficiência ao estudar o cálculo de áreas por Integral Definida.

## 6 Considerações finais

A análise deste trabalho remete à importância atribuída ao uso do Produto Educacional “Ressignificando o cálculo de áreas” em atividades investigativas como metodologia que favoreça a aprendizagem no estudo de áreas de regiões planas irregulares.

A matemática, como geralmente se sabe, é uma disciplina, muitas vezes indesejada por estudantes, que a caracterizam como abstrata demais para ser associada a atividades práticas, para possibilitar o uso de material concreto ou ainda a consideram um amontoado de fórmulas que serão decoradas e logo esquecidas. Entretanto, sabe-se que, muitas vezes, o ensino intensamente tradicional, baseado na repetição exaustiva, tem contribuído para que afirmações desse tipo perpetuem em nossas salas de aulas, como se fossem verdades inquestionáveis.

Verificando os resultados alcançados durante a pesquisa, e nos outros momentos de aplicação do recurso, acreditamos que, dos participantes, a maioria passou a perceber a matemática como sendo criação do próprio homem, compreenderam melhor as necessidades que impulsionaram a sistematização e a formalização do cálculo de áreas irregulares, depois do desenvolvimento da atividade investigativa via História da Matemática durante as aulas de Cálculo II, pois puderam notar que a referida disciplina se constitui num campo aberto de amplas possibilidades metodológicas de aprendizado.

No desenvolvimento da atividade “Ressignificando o cálculo de áreas”, foi possível perceber que a utilização da história da matemática como fio condutor para fazer investigação em sala de aula desperta maior interesse dos alunos no processo ensino-aprendizagem da matemática, instiga a curiosidade dos alunos na resolução da atividade e pode conduzi-los a aprendizados significativos no campo da matemática.

## Referências

- BARONI, Rosa L.S.; TEIXEIRA, Marcos V.; NOBRE, Sergio R. A investigação científica em história da matemática e suas relações com o programa de pós-graduação em educação matemática. In: Bicudo, M.A.; BORBA, M.de C. (org.) **Educação matemática: pesquisa em movimento**. São Paulo: Cortez, 2009. P. 164-185.
- BOYER, Carl B. **História da Matemática**. 2. ed. São Paulo: Edgard Blucher, 1996.
- D'AMBROSIO, Ubiratan. **Da realidade à ação: reflexões sobre educação e matemática**. São Paulo: Summus; Campinas: Ed. da Universidade Estadual de Campinas, 1986.
- FIORENTINI, Dario; LORENZATO, Sergio. **Investigação em educação matemática: percursos teóricos e metodológicos**. 3.ed. Campinas, SP: Autores Associados, 2009
- FLEMMING, Diva M.; GONÇALVES, Mirian B. **Cálculo A: funções, limite, derivadas, integral**. 5. ed. São Paulo: Pearson Makron, 1992.
- FLORIANI, José V. **Professor e pesquisador: exemplificação apoiada na matemática**. Blumenau: Ed. da FURB, 2000.
- MENDES, Iran A.; FILHO, Antônio S.; PIRES, Maria A.L.M. **Práticas matemáticas em atividades didáticas para os anos iniciais**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2011.
- MIGUEL, Antônio; MIORIM, Maria A. **História na educação matemática: Propostas e desafios**. Belo Horizonte: Autêntica, 2004.
- MOREIRA, Plínio C.; DAVID, Maria M.M.S. **A formação matemática do professor: licenciatura e prática docente escolar**. Belo Horizonte: Autêntica, 2007.
- PAIS, Luiz C. **Ensinar e aprender matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2006.
- PALIS, Gilda de L. R. **A pesquisa sobre a própria prática no ensino de matemática**. 2015. Disponível em: <<http://lima.ufrj.br/hitem4/paper/40.pdf>>. Acesso em: 25 maio 2015.
- PONTE, João. P. **Pesquisar para compreender e transformar a nossa própria prática**. 2002. Disponível em: <[http://www.scielo.br/pdf/er/n24/n24\\_a03.pdf](http://www.scielo.br/pdf/er/n24/n24_a03.pdf)>. Acesso em: 25 maio 2015.
- PONTE, João. P. da; BROCARD, Joana; OLIVEIRA, Hélia. **Investigação matemática na sala de aula**. Belo horizonte: Autêntica, 2005.
- SCHEFFER, Nilce F. O LEM na discussão de conceitos de geometria a partir das mídias: dobraduras e software dinâmico. In: LORENZATO, S. (Org.) **O laboratório de ensino de matemática na formação de professores**. Campinas, SP: Autores Associados, 2006. P. 93-112.
- SILVEIRA, Everaldo; MIOLA, Rudinei J. **Professor-pesquisador em educação matemática**. Curitiba: Ibpex, 2008.